Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

TỔ CHỨC MỘT SỐ HOẠT ĐỘNG NHẬN THỨC NHẰM GIÚP HỌC SINH THPT HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN TRI THỨC PHƯƠNG PHÁP TRONG DẠY HỌC NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN HÌNH HỌC 12

Chu Trọng Thanh[1] và Nguyễn Thị Hương[2]

[1] *Trường Đại Học Vinh, Nghệ An*

[2] *Lớp Phương pháp và lí luận dạy học bộ môn Toán, Khóa K18, Trường Đại học Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 15/10/2013
Ngày chấp nhận: 25/02/2014

Title:
Organizing some perceptive activities to assist high school students in establishing and developing procedural knowledge in lessons of space coordinate-Geometry Grade 12

Từ khóa:
Tri thức phương pháp, hoạt động dạy học

Keywords:
Procedural knowledge, teaching actions

ABSTRACT

In this paper, we present methods which may assist students in establishing and developing procedural knowledge and the results of using these methods in teaching space coordinate. As a result, we propose teachers to organize some teaching activities which might assist students in raising their awareness of problems, discovering, constructing and mastering knowledge of space coordinate from geometry lessons in grade 12 and in mathematics in general. These methods also support students in enhancing knowledge, building and progressing perceptive methods in solving mathematical questions and related realities.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày các phương thức hình thành và phát triển tri thức phương pháp cho học sinh lớp 12 và kết quả áp dụng vào giảng dạy chủ đề "Phương pháp toạ độ trong không gian". Qua kết quả khảo sát, chúng tôi đề xuất tổ chức một số hoạt động trong giảng dạy hướng dẫn học sinh nhận thức, khám phá, kiến tạo và chiếm lĩnh kiến thức phương pháp toạ độ trong không gian - hình học lớp 12 nói riêng và nội dung môn toán nói chung. Các phương pháp mới cũng giúp học sinh phát triển tư duy, hình thành và phát triển tri thức phương pháp trong quá trình giải quyết các vấn đề Toán học và thực tiễn liên quan.

1 GIỚI THIỆU

Môn Toán học có nhiệm vụ cung cấp cho học sinh kiến thức, kĩ năng, phương pháp toán học cơ bản, góp phần tạo nên vốn văn hóa của mỗi người đồng thời có tác dụng góp phần phát triển năng lực trí tuệ và giáo dục những đức tính, phẩm chất của người lao động. Việc rèn luyện cho học sinh khả năng vận dụng những hiểu biết Toán học vào giải quyết các tình huống toán học, vào học tập các môn học khác và vào thực tiễn đời sống lao động sản xuất là nhiệm vụ hàng đầu của quá trình dạy học môn Toán. Trong dạy học Toán, việc thực hiện nhiệm vụ nêu trên được cụ thể hóa thông qua tổ chức các hoạt động toán học nhằm tạo điều kiện cho học sinh kiến tạo và phát triển những dạng tri thức khác nhau trong đó có tri thức phương pháp.

Quan điểm chủ đạo về đổi mới phương pháp dạy học ngày nay là xem quá trình học tập của học sinh là quá trình hoạt động. Mọi kiến thức, kỹ năng, thái độ học sinh có được đều là kết quả của quá trình hoạt động của học sinh. Chính sự tích cực, tự giác của học sinh trong việc tham gia các hoạt động nhận thức tạo nên hiệu quả học tập. Dạy học theo quan điểm hoạt động là quá trình giáo viên tổ chức, hướng dẫn, điều khiển, tư vấn để học sinh tham gia vào chuỗi các hoạt động tương thích với mục đích và nội dung dạy học, qua đó học sinh đạt được kiến thức, kỹ năng, phát triển được các năng lực và hình thành thái độ theo yêu cầu của bài học.

Trong quá trình dạy học môn Toán luôn có nhiều dạng tri thức cần hình thành ở người học. Tác giả Nguyễn Bá Kim (2008) đã đề cập đến bốn dạng tri thức: Tri thức sự vật, tri thức phương pháp, tri thức chuẩn và tri thức giá trị. Tri thức phương pháp có vai trò quan trọng trong quá trình nhận thức và hoạt động thực tiễn trong mọi lĩnh vực có liên quan đến các đối tượng toán học.

Bài báo này đề cập đến một số khía cạnh liên quan đến việc vận dụng quan điểm hoạt động để hình thành và phát triển tri thức phương pháp trong áp dụng dạy học phương pháp tọa độ trong không gian cho học sinh khi thực hiện quá trình dạy học hình học lớp 12 ở trường trung học phổ thông.

2 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ SỞ

2.1 Khái niệm về hoạt động

Có nhiều định nghĩa khác nhau về hoạt động.

Hoạt động là tổ hợp các quá trình nhận thức và hành vi được điều chỉnh bởi một mục đích có ý thức.

Theo quan điểm về cấu trúc – hệ thống thì hoạt động là một hệ thống hướng tới một mục đích, trong đó nhận thức, hành vi và động cơ được kết hợp và tổ chức bởi một cơ chế tự điều chỉnh nhằm đạt tới một mục đích có ý thức.

Về phương diện triết học và tâm lý học, hoạt động được xem là một phương thức tồn tại của con người trong thế giới. Hoạt động chính là mối quan hệ tác động qua lại giữa con người và thế giới để tạo ra sản phẩm về thế giới và ảnh hưởng về con người.

Trong tâm lý học hiện đại người ta xem hoạt động là bản thể của tâm lý người. Mọi yếu tố tâm lý người như nhận thức, tình cảm, trí tuệ, ý chí,… đều do chủ thể hoạt động tạo nên.

Theo tác giả Nguyễn Phú Lộc (2009), trong hoạt động có hai quá trình diễn ra đồng thời, bổ sung cho nhau và thống nhất với nhau:

– *Quá trình xuất tâm* (externalization): Quá trình này là quá trình đối tượng hóa, trong đó chủ thể chuyển năng lực của mình thành sản phẩm hoạt động.

– *Quá trình nhập tâm* (internalization): Quá trình này là quá trình chủ thể hóa; điều này có nghĩa là khi hoạt động con người chuyển từ phía khách thể vào bản thân mình những quy luật, bản chất của thế giới để tạo nên tâm lý, ý thức, nhân cách của bản thân bằng cách lĩnh hội thế giới.

Như vậy, trong hoạt động, con người vừa tạo ra sản phẩm về phía thế giới, vừa tạo ra tâm lý của chính mình. Tâm lý, ý thức và nhân cách của con người chỉ có thể được hình thành và phát triển trong hoạt động và thông qua hoạt động.

2.2 Tri thức phương pháp

Theo tác giả Chu Trọng Thanh (2010) thì tri thức phương pháp là các thủ thuật trí tuệ, là hiểu biết về cách thức thực hiện các thao tác tư duy, cách thức hành động, cách sử dụng các kĩ năng biến đổi, biết xác định hướng tiếp cận vấn đề, biết sử dụng các công cụ hỗ trợ quá trình nhận thức,…

Tác giả Nguyễn Bá Kim (2008) chia tri thức phương pháp thành hai loại: Các phương pháp có tính chất thuật giải và các phương pháp phi thuật giải. Phương pháp có tính thuật giải là quy trình gồm một số hữu hạn bước thực hiện theo một thứ tự nhất định để đưa ra lời giải cho một lớp gồm các vấn đề cùng loại. Phương pháp phi thuật giải thường chỉ có tính chất định hướng hay những quy trình mang chính chất chung, chưa xác định hoàn toàn về các thành phần chi tiết, khi thực hiện có thể có sự thay đổi nhất định về cấu trúc thành phần.

Theo tác giả Nguyễn Phú Lộc (2011), tri thức phương pháp trong trường phổ thông (kiến thức quy trình): là các thuật toán để giải một loại toán nào đó như thuật giải phương trình bậc nhất một ẩn, các hướng chung để giải một bài toán bất kỳ. Cách quan niệm như vậy là đã giới hạn trong phạm vi loại thứ nhất theo quan điểm của tác giả Nguyễn Bá Kim được nêu ra trên đây.

Theo Patricia Gaffney Kridler (2012), tri thức phương pháp (Procedural knowledge) (kiến thức tiến trình) là: Bao gồm những kiến thức về các ký hiệu, công thức, quy ước và những kiến thức cần thiết để áp dụng vào các quy trình hoặc các thuật toán.

Tri thức phương pháp theo nghĩa này (thống nhất với tác giả Nguyễn Phú Lộc) gồm hai bộ phận:

Bộ phận thứ nhất: Bao gồm những ký hiệu, công thức quen thuộc.

Bộ phận thứ hai: Bao gồm các quy tắc hoặc quy trình để giải quyết các vấn đề, tạo ra sản phẩm.

Chúng ta có thể tổng hợp những quan niệm nêu trên về tri thức phương pháp để có thể hiểu như sau:

Tri thức phương pháp là loại tri thức về việc vận dụng hệ thống kiến thức về các khái niệm, các quy tắc, các thuật toán, các ký hiệu, kinh nghiệm,… để giải quyết các vấn đề khoa học và thực tiễn.

3 CÁC PHƯƠNG THỨC HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN TRI THỨC PHƯƠNG PHÁP CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN

Cũng như các yếu tố tâm lý khác, để hình thành và phát triển tri thức phương pháp cho học sinh trong dạy học cần tổ chức cho học sinh thực hiện những hoạt động nhất định phù hợp. Chúng tôi đề xuất sự tích hợp một số dạng hoạt động đó dưới dạng các phương thức hình thành tri thức phương pháp ở học sinh. Trong dạy học, người giáo viên có thể dựa vào các phương thức này để thiết kế các hoạt động và tổ chức cho học sinh thực hiện.

Phương thức thứ nhất: Tiếp nhận quy trình thao tác, thực hành, điều chỉnh hành vi dẫn đến sự hình thành và phát triển tri thức phương pháp.

Phương thức này cho rằng để hình thành một tri thức phương pháp mang tính thuật giải, người học sinh phải biết được các bước cần thực hiện cùng với thứ tự thực hiện các bước đó, thực hành, làm thử hay bắt chước và điều chỉnh hành vi của mình theo nguyên tắc củng cố những gì đã làm đúng và sửa lại những chỗ sai cho đến khi thực hiện thành công thuật giải cho trong tri thức phương pháp đó. Khi chuyển hóa vào dạy học, giáo viên có thể dùng những cách khác nhau như giới thiệu một cách tường minh hay vừa làm mẫu vừa thuyết trình quy trình thao tác, giao tình huống để học sinh thực hành, giáo viên theo dõi và giúp học sinh nhận ra những chỗ làm đúng, những chỗ làm sai và định hướng sửa chữa. Quá trình này lặp lại một số lần để học sinh nắm được quy trình thực hiện thuật giải.

Ví dụ 3.1. Trong quá trình dạy học sinh thiết lập phương trình tổng quát của đường thẳng trong mặt phẳng giáo viên có thể gợi lại các cách xác định một đường thẳng trong mặt phẳng và lựa chọn cách xác định cụ thể: Biết một điểm của đường thẳng và phương vuông góc của đường thẳng đó. Từ đó sử dụng phương pháp tọa độ thể hiện các đối tượng (điểm, đường thẳng, phương) và quan hệ (thuộc, vuông góc), và dẫn đến phương trình. Trong quá trình này giáo viên làm rõ quy trình thao tác và học sinh thực hành. Giáo viên theo dõi quá trình thực hiện thao tác của học sinh, nếu có sai thì giúp học sinh nhận ra chỗ sai và điều chỉnh để hình thành quy trình chuẩn.

Phương thức thứ hai: Thực hiện sự chuyển hóa từ tri thức sự vật thành tri thức phương pháp thông qua việc khai thác chức năng công cụ của tri thức sự vật.

Mọi tri thức sự vật khi được sử dụng để giải quyết một vấn đề nhận thức trong tình huống nào đó thì nó đã mang chức năng công cụ. Việc khai thác chức năng công cụ của một tri thức sự vật trong nhiều tình huống dần dần hình thành nên tri thức phương pháp. Trong trường hợp này tri thức sự vật trở thành tri thức phương pháp. Cơ chế chuyển hóa ở đây có thể so sánh với quy luật lượng biến thành chất trong triết học duy vật biện chứng. Sự chuyển hóa này có thể thực hiện theo hai con đường sau đây:

Thứ nhất, sử dụng những ví dụ cùng loại để khắc sâu quy trình thao tác khi vận dụng tri thức sự vật.

Ví dụ 3.2. Trong chương trình môn Toán ở trường phổ thông có đề cập đến tính chất cộng của số đo diện tích: Nếu một hình được chia thành hai hình không chồng lên nhau (tức là không có điểm trong chung) thì diện tích của hình đã cho bằng tổng diện tích của hai hình được tách ra sau. Có thể đưa ra hệ tình huống vận dụng tính chất trên trong cách giải để hình thành tri thức phương pháp (phương pháp sử dụng diện tích):

– Tổng khoảng cách từ một điểm M nằm trong một tam giác đều cho trước đến 3 cạnh tam giác không phụ thuộc vị trí của điểm M.

– Tổng khoảng cách từ một điểm M nằm trong một hình vuông cho trước đến 4 cạnh hình vuông không phụ thuộc vị trí của điểm M.

– Tổng khoảng cách từ một điểm M nằm trong một hình thoi cho trước đến 4 cạnh hình thoi không phụ thuộc vị trí của điểm M.

– Tổng khoảng cách từ một điểm M nằm trong đa giác có các cạnh bằng nhau cho trước đến tất cả các cạnh đa giác không phụ thuộc vị trí của điểm M.

Thứ hai, sử dụng các tình huống đa dạng cùng áp dụng một kiến thức và kết hợp với sự quan sát, nhận xét để thấy rõ tri thức được sử dụng làm công cụ, làm phương tiện giải quyết vấn đề đặt ra trong mỗi tình huống.

Ví dụ 3.3. Sau khi học sinh học kiến thức về hệ thức lượng trong tam giác vuông: Trong tam giác ABC vuông tại A, với các cạnh a, b, c tương ứng các đỉnh A, B, C, ta có các hệ thức:

$a^2 = b^2 + c^2$ (định lí Pitago).

Có thể sử dụng kiến thức này để giải quyết các tình huống:

– Dựng hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình đa giác cho trước.

– Từ đồ thị của hàm số y = f(x) hãy suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$.(Chu trọng Thanh, 2011)

Phương thức thứ 3: Phối hợp giữa suy luận có lý và suy luận diễn dịch hình thành nên tri thức phương pháp khám phá mang tính đặc thù của môn Toán.

Toán học là khoa học suy diễn. Phương pháp tiên đề, phương pháp suy diễn, suy luận theo các sơ đồ hình thức, là những phương pháp mang tính đặc thù của khoa học toán học xét về phương diện trình bày hệ thống tri thức (sản phẩm hoàn chỉnh của quá trình nghiên cứu). Trong quá trình tìm tòi, khám phá tri thức toán học người ta luôn phải trải qua một giai đoạn thực nghiệm, quá trình thử chọn, quá trình dự đoán và mò mẫm, quá trình suy luận có lý. Xét về phương diện này ta thấy toán học cũng sử dụng các phương pháp của khoa học thực nghiệm. Mỗi tri thức toán học đều là kết quả của sự phối hợp giữa hai loại phương pháp nói trên của nhà toán học trong quá trình nghiên cứu. Thông thường trong sự phối hợp này, các suy luận có lý (cùng với yếu tố trực cảm toán học) có vai trò gợi ý cho sự khám phá sáng tạo và suy luận lôgic đóng vai trò xác lập tính đúng đắn của kết quả nghiên cứu.

Ví dụ 3.4. Việc giải bài toán chứng minh $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ là một bài toán dễ và học sinh trung học phổ thông có thể giải bằng phương pháp quy nạp toán học.

Tuy nhiên với bài toán: Lập công thức tính S_n và T_n qua n trong các trường hợp sau:

a) $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$;

b) $T_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

thì vấn đề sẽ phức tạp hơn. Việc nhớ được biểu thức ở a) là $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*) hay của b) là $[\frac{n(n+1)}{2}]^2$ (**) để tiến hành quá trình quy nạp không phải dễ dàng. Đa số tài liệu tham khảo hiện nay đều trình bày quá trình nhận được các biểu thức trên đây bằng cách khái quát hóa từ các biến đổi $1 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$; $5 = \frac{2(2+1)(2.2+1)}{6}$ để đoán ra công thức ở a). Điều này có vẻ quá khiên cưỡng. Tốt nhất là nên tập cho học sinh tìm đoán ra (*) hay (**) theo một cách thức tự nhiên hơn. Có thể thực hiện quá trình tìm đoán này như sau:

Nhận thấy $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ (n số hạng) $< S_n < n^2 + n^2 + \ldots + n^2 = n^3$. Như vậy S_n là biểu thức nhận giá trị giữa n và n^3, với mọi số nguyên dương n. Ta có thể dự đoán biểu thức S_n có dạng một đa thức của n. Việc tìm công thức S_n bắt đầu bằng cách đoán S_n là một đa thức bậc nhất hay bậc hai của n. Dùng cách cho n nhận những giá trị cụ thể (số giá trị của n cần chọn bằng số hệ số của đa thức dự đoán, thông thường nên chọn từ 1, 2, 3, . . .) ta nhận được các biểu thức có thể có của S_n nhờ lập và giải hệ phương trình bậc nhất (phương pháp hệ số bất định). Trong mỗi trường hợp, sau khi nhận được biểu thức của S_n, bằng cách thử thêm một vài giá trị của n ta loại được những biểu thức dự đoán sai và củng cố niềm tin với biểu thức dự đoán có khả năng đúng. Kết quả là nhận được biểu thức $S_n = a.n^3 + b.n^2 + c.n + d$, với $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$, tức là có (*).

Sau khi nhận được (*), việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học là đơn giản.

Đối với câu b) cũng có thể làm tương tự.

Ví dụ trên đây cho thấy, có thể hình thành cho học sinh một tri thức phương pháp thuộc lĩnh vực tìm đoán. Ngoài ra cũng còn góp phần củng cố một số tri thức phương pháp khác như phương pháp quy nạp toán học, phương pháp hệ số bất định trong việc tìm ra (*), phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn,...

4 HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN TRI THỨC PHƯƠNG PHÁP CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Chúng tôi vận dụng tổng hợp quan điểm hoạt động và dùng các phương thức hình thành tri thức phương pháp như đã trình bày phần trên vào tổ chức quá trình dạy học. Một số nội dung chủ đề phương pháp tọa độ trong không gian được áp dụng các phương pháp đó sẽ hỗ trợ hướng dẫn học sinh thu nhận được kiến thức mới và hình thành và phát triển tri thức phương pháp. Có thể đưa ra một số cách thức vận dụng như sau:

Thứ nhất, trong quá trình tổ chức cho học sinh kiến tạo tri thức về chủ đề phương pháp tọa độ trong không gian cần giúp học sinh củng cố kiến thức đã học và ứng dụng những kiến thức đó vào các tình huống của bài học một cách hợp lí để giải quyết các vấn đề đặt ra trong bài mới.

Chẳng hạn, khi dạy học nội dung của định lí về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng "*Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α) có phương trình Ax + By + Cz + D = 0 và điểm* $M_0(x_0;y_0;z_0)$*. Khoảng cách từ điểm* M_0 *đến mặt phẳng (α), kí hiệu là* $d(M_0, (\alpha))$*, được tính theo công thức:*

$$d(M_{0,}(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\text{"}$$

Giáo viên gợi ý cho học sinh phát hiện ra những ứng dụng khác nhau của định lí:

Ứng dụng 1: Sử dụng định lí để tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Ví dụ 4.1. Trong mặt phẳng Oxyz, cho điểm M(2;1;5) và hai mặt phẳng (P),(Q) có phương trình: (P): x + y + 2z + 3 = 0, (Q): x + y + 2z – 9 = 0.

– Tìm khoảng cách của M với mặt phẳng (Q).

– Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Với bài toán này, học sinh có thể sử dụng trực tiếp công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng một cách dễ dàng.

Ứng dụng 2: Sử dụng định lí để viết phương trình mặt phẳng

Ví dụ 4.2. Trong không gian, viết phương trình mặt phẳng trong các trường hợp sau:

– Mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng (P): x + 2y + 2z + 11 = 0 và (Q): x + 2y + 2z + 2 = 0.

– Mặt phẳng song song với mặt phẳng (R): 4x +3y – 12z +1= 0 và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình; $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.

Như vậy, đối với câu a, để viết được phương trình mặt phẳng thì học sinh phải hiểu được mặt phẳng cần tìm là quỹ tích các điểm cách đều hai mặt phẳng cho trước. Đối với câu b, học sinh phải phát hiện ra mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu thì khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng chính bằng bán kính của mặt cầu.

Ứng dụng 3: Sử dụng định lí để tìm tọa độ một điểm thỏa mãn điều kiện cho trước.

Ví dụ 4.3. Tìm điểm M trên trục oz trong mỗi trường hợp sau:

– M cách đều điểm A(2;3;4) và mặt phẳng 2x + 3y + z – 17 = 0.

– M cách đều hai mặt phẳng x + y – z + 1 = 0 và x – y + z + 5 = 0.

Với bài tập này, học sinh cần phát hiện sự cách đều của hai đối tượng để có thể áp dụng nội dung định lí.

Nhìn chung, từ những ứng dụng nêu trên, giáo viên có thể đưa ra một hệ thống các bài tập, giúp học sinh có thể áp dụng nội dung định lí để giải. Thông qua hệ thống bài tập, học sinh sẽ chiếm lĩnh và khắc sâu kiến thức về nội dung của định lí cũng như các ứng dụng của nó. Từ đó tri thức phương pháp ở mỗi học sinh được khắc sâu và phát triển.

Thứ hai: Cần thiết kế tình huống dạy học, sao cho nhiệm vụ nhận thức của học sinh phải tác động vào vùng phát triển gần nhất hoặc từng bước chuyển hóa nhiệm vụ nhận thức về vùng phát triển gần nhất, trong suốt quá trình tập luyện cho học sinh hoạt động liên tưởng và huy động kiến thức, tri thức sự vật cần thiết để làm công cụ giải quyết vấn đề.

Sự phát triển nhận thức của người học phụ thuộc vào quá trình tích lũy các mối liên tưởng và trình độ nhận thức phụ thuộc vào số lượng các mối liên tưởng về tốc độ hoạt hóa các liên tưởng đó. Như vậy, liên tưởng có vai trò đặc biệt trong quá trình phát triển nhận thức. Liên tưởng có vai trò quan trọng đến khả năng phát triển tri thức của người học. Bên cạnh đó, tác giả Đào Tam cho rằng, năng lực huy động kiến thức đòi hỏi ở mức độ cụ thể cao hơn so với năng lực định hướng. Học sinh cần chọn công cụ thích hợp để giải quyết vấn đề (Đỗ Văn Cường (2012)). Vì vậy, khi xác định năng lực huy động kiến thức thì khả năng biến đổi vấn đề, biến đổi các bài toán đóng vai trò rất quan trọng. Nhờ đó mà học sinh có thể biến đổi, có thể quy chúng trong tình huống mới, các bài toán lạ về các bài toán quen thuộc, các bài toán tương tự đã biết cách giải (Đào Tam, Lê hiển Dương (2008)). Tác giả G.Polya (2010), tất cả những tư liệu, yếu tố phụ, các định lí này,... lấy từ đâu? Người giải đã tích lũy những tri thức ấy trong trí nhớ, giờ đây rút ra vận dụng một cách thích hợp để giải bài toán.

Chúng ta gọi việc nhớ lại có chọn lọc các tri thức như vậy là sự huy động, việc làm cho chúng thích ứng với bài toán đang giải là sự tổ chức. Như vậy, để học sinh phát triển trí tuệ thì năng lực liên tưởng và huy động kiến thức là hết sức thiết yếu. Vì thế, trong dạy học, giáo viên cần phải tổ chức các hoạt động sao cho học sinh có thể phát triển được năng lực này. Thực tế giảng dạy cho thấy, để phát hiện ra một vấn đề nào đó học sinh thường liên tưởng đến những kiến thức và kĩ năng mà họ sẵn có. Trên cơ sở đó, họ so sánh đối chiếu với yêu cầu của vấn đề cần giải quyết. Quá trình này chính là quá trình di chuyển tri thức từ "*vùng phát triển gần nhất*" đến trình độ hiện tại. Quá trình này giúp học sinh từng bước phát triển khả năng liên tưởng và huy động kiến thức cho bản thân.

Nhìn chung, để phát triển năng lực liên tưởng và huy động kiến thức cho học sinh, giáo viên cần phải tổ chức các hoạt động học tập có thể thúc đẩy hoạt động học tập của học sinh. Cụ thể là, giáo viên cần giao nhiệm vụ học tập gắn với "*vùng phát triển gần nhất*" cho các đối tượng để khuyến khích cũng như kích thích nhu cầu chiếm lĩnh tri thức của học sinh, giúp học sinh phát triển năng lực tự học cũng như kĩ năng vận dụng tri thức một cách sáng tạo.

Ví dụ 4.4. Cho điểm M(1;4;2) và mặt phẳng (α): $x + y + z - 1 = 0$.

Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

Vì học sinh đã học nội dung bài phương trình mặt phẳng và phương trình đường thẳng nên đối với bài toán này không quá xa với các tri thức sự vật được học.

Đối với bài này học sinh cần hiểu kĩ nội dung yêu cầu bài toán để đưa bài toán về những nội dung kiến thức đã học.

Giáo viên có thể gợi ý cho học sinh vẽ hình, hỗ trợ nhìn nhận vấn đề rõ ràng hơn thông qua hình ảnh trực quan.

Giáo viên gợi ý tri thức sự vật về phương trình mặt phẳng và phương trình đường thẳng:

– *Với giả thuyết đề bài đã cho, chúng ta có thể biết được những gì?*

– *Mối quan hệ của vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) và đường thẳng chứa điểm M và hình chiếu H của M lên (α)?*

– *Để giải quyết yêu cầu bài toán ta cần làm gì?*

Các câu hỏi mở như thế giúp học sinh chuyển tri thức sự vật là các yếu tố cần thiết của phương trình mặt phẳng và phương trình đường thẳng đến "*vùng phát triển gần nhất*" giúp học sinh để ý đến việc cần viết phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với (α).

Như vậy, trong quá trình hình thành và phát triển tri thức phương pháp cho học sinh, có khi với những tình huống học sinh gặp khó khăn, có nghĩa là vấn đề cần giải quyết còn ở vùng quá xa. Khi đó giáo viên có thể chuyển đổi tri thức sự vật về vùng gần nhất để gợi ý cho vấn đề. Tuy nhiên, gợi ý như thế nào thì cần cân nhắc và điều chỉnh tùy thuộc vào trình độ và năng lực của học sinh. Nếu quá dễ thì sẽ không gợi được cho học sinh nhu cầu nhận thức. "Vùng phát triển gần nhất" là cầu nối giữa kiến thức, giữa những tri thức sự vật mà học sinh đã học với những vấn đề, những bài tập nâng cao. Để giải quyết được những vấn đề đó đòi hỏi học sinh phải có năng lực liên tưởng và huy động kiến thức. Hình thức này sẽ giúp học sinh phát triển khả năng dự đoán các vấn đề, từng bước hình thành và phát triển tri thức phương pháp cho bản thân học sinh.

Thứ ba: Trong quá trình giải quyết vấn đề cần giúp cho học sinh thấy được ý nghĩa, mục đích của việc thực hiện các thao tác, các hành động và hình thành thói quen nhìn nhận một vấn đề dưới nhiều góc độ khác nhau trong quá trình phát triển nhận thức hệ thống kiến thức.

Theo R. Marzano (1992), trong quá trình dạy học, giáo viên cần chú ý cho học sinh tích cực thực hiện các hoạt động trí tuệ như: so sánh, phân loại, trừu tượng hóa, tổng hợp hóa, đặc biệt hóa, phân tích lỗi vì khi học sinh có sự tích cực hóa hoạt động thì sơ đồ nhận thức dần có sự thay đổi để có những phát triển thành sơ đồ mới. Quá trình này có vai trò rất quan trọng trong việc huy động cũng như phát triển tri thức cho học sinh. Nó tạo điều kiện thuận lợi cho việc nhìn nhận vấn đề dưới nhiều góc độ khác nhau trong quá trình chiếm lĩnh tri thức của người học. Tạo điều kiện cho quá trình phát triển tri thức phương pháp cho người học, từ đó người học sẽ thích nghi và có thêm tri thức phương pháp để giải quyết các tình huống mới. Các hoạt động này không thực hiện một cách riêng lẻ mà chúng đan xen nhau bổ trợ cho nhau. Qua việc bồi dưỡng có luyện tập, học sinh biết cách biến đổi thông tin, tri thức mới đồng thời từng bước phát triển tri thức phương pháp cho mỗi tình huống mỗi vấn đề cần giải quyết, và tư duy sáng tạo ở học sinh ngày càng phát triển.

Trong quá trình dạy học, việc tăng cường luyện tập cho học sinh thói quen nhìn nhận vấn đề dưới nhiều góc độ khác nhau là hết sức cần thiết. Điều này được thực hiện tốt, không những giúp học sinh giải quyết được vấn đề trước mắt mà còn hình thành ở học sinh thói quen gắn kết các kiến thức lại với nhau, biết nhìn nhận vấn đề dưới nhiều góc độ, biết phân tích vấn đề để gắn kết với những kiến thức cũ trước một vấn đề, một nội dung mới cũng như phát triển tri thức phương pháp từ những quy trình, những kiến thức chuẩn đã học. Có như vậy, tư duy sáng tạo của học sinh mới được phát triển nhờ đó mà tri thức phương pháp cũng được phát triển đáng kể.

Ví dụ 4.5. Lập phương trình mặt cầu có đường kính AB với A(4;-3;7), B(2;1;3).

Bài này khá đơn giản, học sinh có thể giải được ngay với phương pháp viết phương trình mặt cầu vừa được hình thành ở nội dung của tri thức sự vật.

Bao gồm các bước sau:

Bước 1: Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (Trung điểm I của đoạn AB).

Bước 2: Tìm bán kính của mặt cầu (độ dài IA = IB = $\frac{AB}{2}$).

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu.

Tuy nhiên, ta có thể giúp học sinh khai thác bài toán này theo nhiều góc độ khác nhau:

Hướng thứ nhất: Trong không gian, tìm tập hợp các điểm M(x;y;z) thỏa MA $\perp$ MB với

A(4;-3;7), B(2;1;3).

Đây chính là dạng phát biểu khác của bài toán trên.

Ta có thể thấy: M(x;y;z) $\in$ (S) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

$\Leftrightarrow$ (x – 4)(x – 2) + (y + 3)(y – 1) + (z – 7) (z – 3) = 0.

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 26 = 0$.

$\Leftrightarrow$ (x – 3)2 + (y + 1)2 + (z – 5)2 = 9 (đây là phương trình mặt cầu cần tìm).

Hướng thứ hai: Trong không gian, tìm tập hợp các điểm M sao cho tam giác MAB vuông tại M với A(4;-3;7), B(2;1;3).

Vì M(x;y;z) $\in$ (S) nên tam giác MAB luôn vuông tại M, nếu học sinh nhớ và liên hệ được điều này thì học sinh có thể dễ dàng nhận ra, đây là bài toán tìm phương trình mặt cầu.

Vì tam giác MAB vuông tại M nên ta có: $AM^2 + BM^2 = AB^2$.

$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 36$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 26 = 0$.

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 9$.

Ví dụ 4.6. Cho vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, chứng minh rằng:

$$\cos^2\left(\vec{u};\vec{i}\right)+\cos^2\left(\vec{u};\vec{j}\right)+\cos^2\left(\vec{u};\vec{k}\right)=1 \quad (1)$$

Với bài toán này, giả sử $\vec{u}$ = (x;y;z), thì với kiến thức đã học, học sinh có thể tính được:

$$\cos\left(\vec{u};\vec{i}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{i}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{i}\right|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$, suy ra

$$\cos^2\left(\vec{u};\vec{i}\right)=\left(\frac{\vec{u}.\vec{i}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{i}\right|}\right)^2=\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Tương tự:

$$\cos^2\left(\vec{u};\vec{j}\right)=\left(\frac{\vec{u}.\vec{j}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{j}\right|}\right)^2=\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$$ và

$$\cos^2\left(\vec{u};\vec{k}\right)=\left(\frac{\vec{u}.\vec{k}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{k}\right|}\right)^2=\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Suy ra kết quả cần chứng minh

Mặt khác, ta có thể khai thác bài toán này theo các góc độ khác nhau như sau:

Hướng thứ nhất: Cho vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, gọi α;β;μ là ba góc tạo bởi vector $\vec{u}$ với Ox, Oy, Oz. Chứng minh rằng: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\mu = 1$.(Dạng phát biểu khác của bài toán).

Hướng thứ hai: Cho hệ trục tọa độ Oxyz, một mặt phẳng (Q) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C và tạo với các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) các góc α, β, μ. Chứng minh rằng : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\mu = 1$.Giáo viên có thể gợi ý: Giả sử tọa độ của A, B, C lần lượt là A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c), với a > 0, b > 0, c > 0. Hãy nêu cách xác định các góc α, β, μ và nêu cách chứng minh bài toán? Nếu học sinh không trả lời được thì giáo viên gợi ý thêm: Hãy viết phương trình mặt phẳng (Q)? Nêu cách tính $\cos^2\alpha$? Từ đó nêu cách chứng minh bài toán.

Ở trường hợp này, câu trả lời mà giáo viên hướng đến là: Mặt phẳng (Q) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, với vector pháp tuyến $\vec{n}=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$. Mặt phẳng (OBC) chính là mặt phẳng (Oyz) nên có vector pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Từ đó suy ra

$$\cos^2\alpha=\left(\frac{\vec{n}.\vec{i}}{|\vec{n}||\vec{i}|}\right)^2=\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\cos^2\beta=\frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

và $\cos^2\mu=\frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

Suy ra: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\mu=1$.

Hướng thứ ba: Cho một hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đường chéo AC_1 tạo với ba cạnh xuất phát từ đỉnh A ba góc α, β, μ. Chứng minh rằng: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\mu=1$.

Đối với bài toán này, học sinh thường gặp khó khăn trong việc xác định các góc α, β, μ tạo bởi đường thẳng AC_1 với ba cạnh AB, AD, AA_1. Vì vậy, học sinh không định được hướng để chứng minh. Để khắc phục vấn đề, giáo viên hướng học sinh đến các hoạt động liên tưởng và huy động kiến thức bằng cách chuyển hóa các liên tưởng và sử dụng phương pháp tọa độ để giải.

Gọi a, b, c lần lượt là các kích thước của hình chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

$O\equiv A$, B thuộc tia Ox, D thuộc tia Oy, A_1

thuộc tia Oz. Suy ra: B(a;0;0); D(0;b;0);

$A_1(0;0;c)$ và $C_1(a;b;c)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$, $\overrightarrow{AD}=(0;b;0)$,

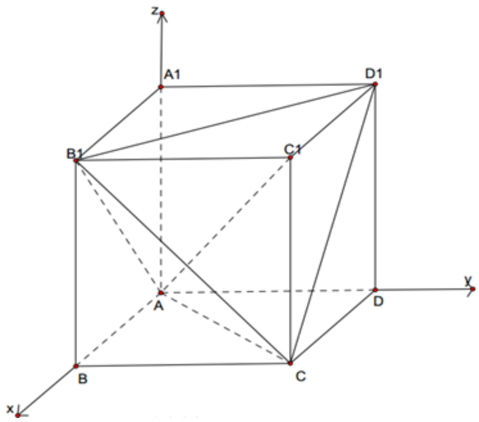
$\overrightarrow{AA_1}=(0;0;c)$ và $\overrightarrow{AC_1}=(a;b;c)$.

Ta có $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{AC_1};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự $\cos^2\beta=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$ và

$\cos^2\mu=\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$ Suy ra: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\mu=1$.



Nhìn chung, thông qua các trường hợp riêng lẻ ta có thể khai thác để chuyển từ trường hợp riêng này sang trường hợp riêng khác hoặc mở rộng và phát triển bài toán này thành bài toán khác. Sự liên hệ giữa các bài toán, giúp cho người học có thêm khả năng nhìn nhận một bài toán, một vấn đề theo nhiều góc độ khác nhau, khả năng tìm ra những mối liên hệ bên trong của đối tượng, làm bộc lộ các thuộc tính bản chất của đối tượng. Quá trình thực tập góp phần rèn luyện thói quen khai thác một vấn đề dưới nhiều góc độ khác nhau cũng như bồi dưỡng khả năng hình thành và phát triển tri thức phương pháp cho người học.

Thứ tư: Tập luyện cho học sinh sử dụng ngôn ngữ, kí hiệu toán học, để diễn đạt chính xác các nội dung toán học theo nhiều cách khác nhau tương đương, từ đó biết cách diễn đạt theo hướng có lợi nhất tạo điều kiện thuận lợi cho việc giải quyết vấn đề.

Thực tiễn dạy học cho thấy: Đa số học sinh phổ thông rất hạn chế về ngôn ngữ toán học. Điều này thể hiện qua việc học sinh thường mắc những lỗi sai lầm như không nắm vững về cú pháp và ngữ nghĩa của các thuật ngữ, kí hiệu, công thức trong khi giải quyết vấn đề toán học. A.A.Soliar cho rằng

"*Mặt ngữ nghĩa phải trội hơn trong tất cả các giai đoạn của quá trình giảng dạy, mặt cú pháp nên áp dụng chỉ ở chỗ mà ở đó cần phải nắm vững các angôrit xác định*''(Nguyễn Văn Thuận, 2004). Tác giả đã chỉ ra các sai lầm có liên quan đến vấn đề ngôn ngữ, đó là những sai lầm có liên quan đến ngữ nghĩa và cú pháp của học sinh. Điều này ảnh hưởng rất lớn đến việc sử dụng ngôn ngữ toán học của học sinh trong quá trình từng bước hình thành và phát triển tri thức phương pháp cũng như quá trình tiếp thu tri thức. Do vậy, trong quá trình truyền thụ tri thức cho học sinh, giáo viên cần quan tâm đến việc tập luyện cho học sinh sử dụng ngôn ngữ, kí hiệu toán học, giúp học sinh thấy rõ, một nội dung hay một vấn đề toán học nào đó có thể được phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau. Giáo viên tổ chức các hoạt động cho học sinh diễn đạt, chuyển đổi ngôn ngữ, kí hiệu của nội dung các khái niệm, định lí,… sao cho học sinh có thể lựa chọn cách thức thể hiện ngắn gọn dễ hiểu nhất, đồng thời có thể lựa chọn sử dụng các định nghĩa tương đương của khái niệm tùy theo từng vấn đề toán học. Quá trình này được thực hiện tốt thì học sinh có thể nắm vững hơn các nội dung khái niệm, định lí và các vấn đề toán học được đề cập đến.

Ví dụ 4.7. Khi đề cập đến điều kiện về vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian thì có hai cách thể hiện như sau:

Trong không gian, cho đường thẳng d đi qua điểm M_0, có vector chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' đi qua M'_0, có vector chỉ phương $\vec{u'}$. Khi đó vị trí tương đối của d và d' được xác định như sau:

Cách 1:

– d song song với d' khi và chỉ khi $\begin{cases} \vec{u} = k\vec{u'} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$

– d trùng với d' khi và chỉ khi $\begin{cases} \vec{u} = k\vec{u'} \\ M_0 \in d' \end{cases}$

– d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình ẩn t, t' sau:

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_1 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_1 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$ có đúng một nghiệm

– d và d' chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ không cùng phương và hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_1 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_1 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$ vô nghiệm.

Cách 2:

– d song song d' khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{u'}$ cùng phương và $\vec{u}, \overrightarrow{M_oM'_o}$ không cùng phương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_oM'_o}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$$

– d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_oM'_o}$ đôi một cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_oM'_o}\right] = \vec{0}$

– d và d' cắt nhau khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{u'}$ không cùng phương và $\vec{u}$, $\overrightarrow{M_oM'_o}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_oM'_o} = 0 \end{cases}$$

– d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_oM'_o}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_oM'_o} \neq 0$

Cả hai cách trên đều tương đương nhau, tuy nhiên, tùy theo từng trường hợp cụ thể mà sử dụng Cách 1 hay Cách 2. Đối với một số học sinh năng lực còn hạn chế thì các em thường sử dụng cách 1 để giải quyết vấn đề, vì với Cách 1 thì công thức đơn giản hơn.

Ví dụ 4.8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi G là trọng tâm của tam giác BDA'. Chứng minh rằng A, G, C' thẳng hàng.

– Chuyển bài toán sang ngôn ngữ vector: A, G, C' thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AG} = m\overrightarrow{AC'}$, xác định m. Việc xác định m nhờ khai triển các vector $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC'}$ qua ba vector không đồng phẳng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA} = \vec{c}$. Và từ đó tính được m = $\frac{1}{3}$.

– Chuyển sang ngôn ngữ tọa độ nhờ hệ tọa độ sao cho A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1). Tính tọa độ trọng tâm G trong hệ tọa độ vừa chọn và chứng minh tọa độ của G thỏa mãn phương trình đường thẳng AC'.

– Lập luận chứng minh rằng hình chiếu của ba điểm A, G, C' theo hai phương pháp khác nhau có ảnh là các điểm thẳng hàng.

Như vậy, tùy thuộc vào khả năng chuyển đổi ngôn ngữ trong nội tại một nội dung toán học mà học sinh có thể biến đổi vấn đề, biến đổi các bài toán và quy các vấn đề trong tình huống mới, các bài toán lạ về các bài toán quen thuộc, các bài toán tương tự đã giải.

5 KẾT LUẬN

Việc xây dựng và tổ chức những hoạt động trong quá trình dạy học nội dung môn toán sẽ giúp học sinh phát triển khả năng khám phá, kiến tạo đồng thời chiếm lĩnh tri thức. Không những thế, thông qua các hoạt động này, học sinh biết sử dụng kiến thức làm công cụ để giải quyết các vấn đề toán học. Kết quả sau cùng là, mỗi cá nhân học sinh sẽ hình thành và phát triển được tri thức phương pháp và tiếp nhận tri thức ở học sinh ngày càng được tiến sâu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Văn Như Cương, Đoàn Quỳnh, Phạm Khắc Ban, Lê Huy Hùng, Tạ Mân (2008), *Sách giáo khoa Hình học 12*, NXB Giáo Dục.
2. Đỗ Văn Cường (2012), *Bồi dưỡng cho HS năng lực thích nghi trí tuệ nhằm nâng cao hiệu quả dạy học hình học không gian ở trường Trung học phổ thông*, Luận án tiến sĩ giáo dục học, Đại học Vinh, Nghệ An.
3. Nguyễn Phú Lộc (2011), *Tài liệu ôn cao học*, Trường Đại học Cần Thơ, Cần Thơ.
4. Nguyễn Phú Lộc (2009), *Giáo trình học tập trong hoạt động và bằng hoạt động*, Tủ sách Đại học Cần Thơ.
5. Nguyễn Bá Kim (2008), Phương pháp dạy học môn Toán, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.
6. Polya, G. (2010), *Sáng tạo toán học,* Nxb giáo dục, Hà Nội.
7. Đào Tam & Lê Hiển Dương (2008), *Tiếp cận các phương pháp dạy học không truyền thống trong dạy học Toán ở trường Đại học và trường phổ thông*, Nxb Đại học Sư phạm, Hà Nội.
8. Chu Trọng Thanh (2010), "Vận dụng các khái niệm công cụ của lí thuyết phát sinh nhận thức vào môn Toán", *Tạp chí Giáo dục học* số 207, tr. 37, 38, 39.
9. Chu Trọng Thanh (2011), Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào giải bài toán cầu phương các hình phẳng và dựng đồ thị hàm số, Tạp chí Khoa học trường ĐHSP Hà Nội, Vol. 56, No. 4, tr. 24 – 28.
10. Nguyễn Văn Thuận (2004), *Góp phần phát triển tư duy logic và sử dụng chính xác ngôn ngữ Toán học cho học sinh đầu cấp trung học phổ thông trong dạy học Đại số 10*, Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Đại học Vinh, Vinh.
11. Patricia Gaffney Kridler (2012), Master of Education *Procedural and Conceptual Knowledge: A Balanced Approach?*, George Mason University Fairfax, VA.
12. Marzano (1992), R.A *different kind of classroom – Teaching with dimensions of learning*, Alexandria – Association for Supervision and Curriculum Development.