Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

VẬN DỤNG TIẾP CẬN PHÁT HIỆN TRONG DẠY HỌC ĐỊNH LÝ VÀ DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 10

Trần Nguyễn Tố Huyên[1]

[1] *Học viên cao học, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 25/10/2013
Ngày chấp nhận: 25/02/2014

Title:
Helping students identify problems and propose solutions to problems in lessons of theorem and geometry grade 10

Từ khóa:
Phát hiện vấn đề, phát hiện cách giải quyết vấn đề

Keywords:
Identify problems, discover how to solve problems

ABSTRACT

Approaching and discovering are teaching strategies which have attracted teachers all over the world. Mathematical problems are instruments which can be used to develop students' knowledge and thinking. In teaching mathematics, what teachers do to supervise students in identifying problems and proposing potential solutions to problems is very important. In this article, we introduce some strategies which might help students be able to identify problems and propose solutions to problems in lessons of theorem and geometry grade 10.

TÓM TẮT

Tiếp cận phát hiện đang là xu hướng dạy học mới được nhiều nhà sư phạm trên thế giới đặc biệt quan tâm. Các bài toán ở trường phổ thông là phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy. Trong dạy học toán, giáo viên gợi ý và hướng dẫn như thế nào để giúp học sinh phát hiện vấn đề và phát hiện cách giải quyết vấn đề là vô cùng quan trọng. Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu một số biện pháp luyện tập cho học sinh hoạt động theo hướng tiếp cận phát hiện trong dạy học định lý và dạy học giải bài tập hình học 10.

1 ĐẶT VẤN ĐỀ

Dạy học môn Toán theo hướng tiếp cận phát hiện đang là xu hướng được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Có thể kể đến những công trình đáng chú ý sau đây: Tác giả Đào Tam – Lê Hiển Dương (2008) có công trình: "Tiếp cận các phương pháp dạy học không truyền thống trong dạy học Toán ở trường Đại học và trường Phổ thông". Tác giả Nguyễn Bá Kim (2004) và Nguyễn Phú Lộc (2008) cũng giới thiệu những xu hướng dạy học không truyền thống…

Tiếp cận phát hiện được thể hiện trong một số phương pháp dạy học tích cực như: Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, dạy học theo quan điểm kiến tạo, dạy học khám phá, lý thuyết hoạt động,… Trên tinh thần nghiên cứu một số phương pháp dạy học tích cực và một số phương thức hoạt động của học sinh, giáo viên thiết kế và luyện tập cho học sinh những hoạt động, cách thức phán đoán vấn đề, giải quyết vấn đề để họ chiếm lĩnh tri thức một cách hiệu quả. Để vạch ra con đường tiếp cận phát hiện tri thức một cách có hiệu quả thì giáo viên cần bồi dưỡng cho học sinh những loại hình tri thức cơ bản nào, những loại hình hoạt động nào, để học sinh có khả năng điều chỉnh và định hướng phát hiện kiến thức mới?

Để làm sáng tỏ vấn đề đặt ra, bài báo này trình bày một số biện pháp tổ chức luyện tập cho học sinh hoạt động tương thích với nét đặc trưng của hoạt động theo hướng tiếp cận phát hiện trong dạy học định lý và dạy học giải bài tập hình học 10.

2 NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1 Tiếp cận phát hiện

Theo Hoàng Phê (1996), tiếp cận (động từ) có nghĩa là ở gần, ở liền kề; tiến sát gần; đến gần để tiếp xúc; từng bước, bằng những phương pháp nhất định tìm hiểu những nghiên cứu nào đó, còn tiếp cận (danh từ) có nghĩa là cách thức, phương pháp làm việc hay suy nghĩ về vấn đề, nhiệm vụ nào đó; cách thức, phương pháp giải quyết vấn đề. Trong tiếng Anh, "Approach" có nghĩa là sự gần đúng, phép xấp xỉ, cách tiếp cận. Theo từ điển Oxford định nghĩa "Approach" is "*A way of dealing with person or thing"*, nghĩa là "*một cách xem xét con người hoặc sự vật"* (dẫn theo Hồ Văn Quảng, 2011).

Theo Hoàng Phê (1996), phát hiện là *tìm ra cái chưa biết*. Theo Vũ Cao Đàm, phát hiện là sự nhận ra những vật thể, những qui luật xã hội đang tồn tại một cách khách quan (dẫn theo Hồ Văn Quảng, 2011). Theo Nguyễn Hữu Châu, phát hiện là sự hấp thụ về mặt tinh thần một khái niệm hay một nguyên lý mà một cá nhân đã đúc kết từ một hoạt động thể chất hay tinh thần (dẫn theo Hồ Văn Quảng, 2011).

Xuất phát từ hai khái niệm trên chúng ta có thể hiểu tiếp cận phát hiện là sự lựa chọn phương thức để quan sát, xem xét các đối tượng nghiên cứu để khám phá các vật thể hoặc các qui luật xã hội làm thay đổi nhận thức.

Trong dạy học Toán ở trường phổ thông, hoạt động phát hiện là hoạt động trí tuệ của học sinh được điều chỉnh bởi vốn tri thức đã có thông qua các hoạt động khảo sát, tương tác với các tình huống để phát hiện tri thức mới.

2.2 Một số phương pháp luyện tập cho học sinh hoạt động theo hướng tiếp cận phát hiện trong dạy học định lý và giải bài bập hình học 10

2.2.1 Nghiên cứu các tri thức đã có để tạo tình huống cho học sinh khám phá hay phát hiện kiến thức mới

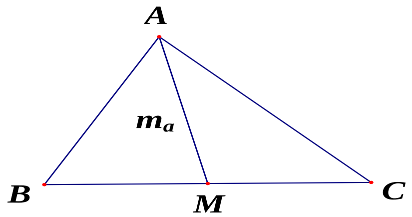
Kiến thức toán học là một chuỗi mắt xích các liên kết chặt chẽ với nhau, các nội dung đã biết sẽ tạo tiền đề và giải thích cho sự xuất hiện của một nội dung mới. Vì vậy trong dạy học Toán giáo viên cần giúp học sinh hiểu rõ nguồn gốc của tri thức khi đứng trước vấn đề cần giải quyết, tạo nhiều tình huống cho học sinh huy động kiến thức đã có, giúp học sinh thấy được nguồn gốc của tri thức và con đường khám phá ra tri thức đó.

Ví dụ: Hình thành công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác trong SGK hình học 10 [1].

Sau khi tạo tình huống để học sinh tiếp cận phát hiện và chứng minh định lý Côsin nhờ sử dụng tri thức cội nguồn là tích vô hướng, giáo viên có thể dẫn dắt học sinh hình thành công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác theo ba cạnh nhờ sử dụng trực tiếp định lý Côsin và hệ quả của nó.

Mặt khác, giáo viên cũng có thể dẫn dắt học sinh hình thành công thức tính độ dài đường trung tuyến bằng cách sử dụng trực tiếp kiến thức của định lý Pythagoras hoặc tích vô hướng.

a. Sử dụng tích vô hướng



Hình 1: Tam giác ABC

Do $m_a{}^2$ chính là $\overrightarrow{AM}^2$ nên từ đó cần khai triển vecto $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ lần lượt có độ dài là c, b.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (1).

Từ (1) hãy làm xuất hiện độ dài trung tuyến m_a?

Mong đợi HS trả lời:

$$(1) \Leftrightarrow m_a{}^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$$

$$= \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \quad (2).$$

Mặt khác ta lại có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \ (3).$$

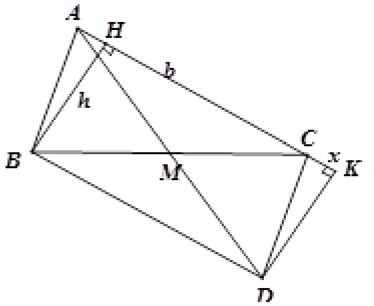
Thay (3) vào (2) ta được:

$$m_a^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)\right]$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Vậy $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

b. Sử dụng định lý Pythagoras



Hình 2: Hình bình hành ABDC

Cho ΔABC, M là trung điểm của BC, vẽ điểm D đối xứng với A qua M. Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Từ B và D kẻ đường vuông góc BH, DK đến AC. Khi đó tam giác vuông HAB và KCD bằng nhau.

Đặt $BH = DK = h,\ AH = CK = x.$

Trong tam giác vuông HBC, ta có: $BC^2 = a^2 = h^2 + (b - x)^2$ (1).

Trong tam giác vuông ADK, ta có: $AD^2 = (2AM)^2 = h^2 + (b + x)^2$ (2).

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$$a^2 + 4m_a^2 = 2h^2 + 2b^2 + 2x^2$$

$$= 2b^2 + 2(h^2 + x^2) = 2b^2 + 2c^2.$$

(Vì $h^2 + x^2 = c^2$ do ΔHAB vuông tại H).

Vậy

$a^2 + 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2$ hay

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

2.2.2 Tạo cơ hội cho học sinh hoạt động khảo sát các trường hợp riêng để từ đó khái quát hóa phát hiện vấn đề mới

Trong toán học, khả năng khái quát hóa có vai trò quan trọng trong việc hình thành các kiến thức hay tiến hành giải các bài toán. Người ta thường xuất phát từ việc khai thác các trường hợp riêng để mở rộng tính chất đó cho một tập hợp lớn hơn, tổng quát hơn và ngược lại có thể dùng cái tổng quát để soi sáng những trường hợp cụ thể [2].

Ví dụ: Khi dạy học phần trọng tâm của hệ điểm chương vectơ trong Hình học 10, giáo viên có thể luyện tập cho học sinh hoạt động khái quát hoá để tiếp cận phát hiện vấn đề.

Bài toán mở đầu:

Cho hai điểm A, B. Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (1).

HS dễ dàng tìm được M là trung điểm của AB.

Sau khi giải bài toán mở đầu giáo viên có thể đặt câu hỏi cho học sinh có bao nhiêu điểm M thoả mãn (1)?

Theo giả thiết $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.$

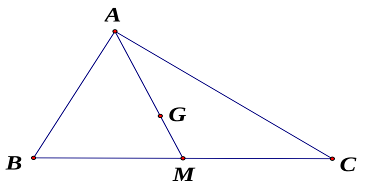
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ (*).$$

Từ (*) suy ra sự tồn tại điểm M ở trên là duy nhất.

Như vậy, với hai điểm A, B bất kì luôn tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

Xuất phát từ bài toán mở đầu học sinh có thể mở rộng dần lên đối với ba điểm, bốn điểm,... và tổng quát với n điểm, cụ thể như sau:

Bài toán 1: Cho ba điểm A, B, C. Tìm điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1).



Hình 3: Hình tam giác ABC

Sử dụng kết quả bài toán gốc học sinh tìm được G là trọng tâm ΔABC.

Thật vậy, nếu gọi M là trung điểm của BC, khi đó:

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$ do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}$

Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{GA'}=2\overrightarrow{GM}$, ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ G là trung điểm của AA' hay G là trọng tâm ΔABC (hay trọng tâm 3 điểm A,B,C). Vậy điểm G tồn tại và duy nhất.

Vậy G là trọng tâm 3 điểm $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } B,C \\ \overrightarrow{GM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA} \end{cases}$$

Đến đây giáo viên có thể gợi ý cho học sinh dự đoán bài toán mở rộng hơn với bốn điểm A,B,C,D ta có bài toán sau:

Bài toán 2:

Cho bốn điểm A,B,C,D. Hãy tìm điểm G sao cho: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Từ kết quả trên học sinh sẽ dự đoán: G là trọng tâm hệ 4 điểm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G_1 \text{ là trọng tâm ba điểm A, B, C} \\ \overrightarrow{GG_1}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GD} \end{cases}.$$

Giáo viên tiếp tục gợi động cơ cho học sinh dự đoán bài toán tổng quát với hệ n điểm.

Bài toán 3 (Bài toán khái quát): Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n\geq 2)$ luôn tồn tại duy nhất điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+...+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ hay $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$.

Điểm G gọi là trọng tâm hệ n điểm.

Việc dự đoán G là trọng tâm của hệ n điểm nếu thoả mãn:

$$\begin{cases} G_1 \text{ là trọng tâm hệ n-1 điểm } A_1, A_2, ..., A_{n-1} \\ \overrightarrow{GG_1}=-\dfrac{1}{n-1}\overrightarrow{GA_n} \end{cases}$$

là hoàn toàn hợp lý vì các biểu thức:

$\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{1}\overrightarrow{MB}$ ứng với trọng tâm hệ 1 điểm A.

$\overrightarrow{GM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ ứng với M là trọng tâm hệ 2 điểm B,C.

$\overrightarrow{GG_1}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GD}$ ứng với G_1 là trọng tâm hệ 3 điểm A,B,C.

Sử dụng khái quát hóa có thể giúp người học mở rộng được vấn đề từ việc nghiên cứu một vài trường hợp riêng lẻ của một đối tượng cụ thể, giúp học sinh rèn luyện khả năng tư duy. Quá trình đó không những đã tập luyện cho học sinh sử dụng hoạt động khái quát hóa, mà còn giúp học sinh phát triển năng lực phát hiện vấn đề và năng lực giải quyết vấn đề.

2.2.3 Tạo cơ hội cho học sinh hoạt động tương tự hóa để phát hiện vấn đề mới

Trong môn Toán ở nhà trường phổ thông có nhiều chủ đề có bố cục nội dung nghiên cứu giống nhau. Vì vậy, khi dạy học giáo viên có thể tổ chức cho học sinh tiếp cận phát hiện nội dung học tập nhờ phép tương tự.

Trong quá trình học tập và rèn luyện thì năng lực tương tự hóa của học sinh cũng được nâng lên. Vì thế, sử dụng phép tương tự trong dạy học nhằm luyện tập năng lực phát hiện vấn đề và phát hiện cách giải quyết vấn đề cho học sinh là cần thiết.

Ví dụ: Cho hai tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$ thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$

(*). Chứng minh rằng hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bằng cách phân tích như sau:

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{GB_1} - \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{GC_1} - \overrightarrow{GC}$.

Biết được điều đó học sinh có thể dự đoán rằng hai tứ giác có cùng trọng tâm. Có thể đặt vấn đề gợi mở để phân tích vectơ tương tự như đối với trường hợp tam giác.

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{GB_1} - \overrightarrow{GB},$$
$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{GC_1} - \overrightarrow{GC},\ \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{GD_1} - \overrightarrow{GD}.$$

Bài toán 1: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DE,EA. Chứng minh rằng hai tam giác MPE và NQR có cùng trọng tâm

Vận dụng đẳng thức (*) trong ví dụ mở đầu, hoàn toàn tương tự học sinh có thể phát hiện để chứng minh tam giác MPE và NQR có cùng trọng tâm ta chỉ cần chứng minh $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{ER} = \vec{0}$

Thật vậy, do M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DE,EA nên $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}$. Vận dụng đẳng thức (*) ta có điều cần chứng minh.

Bài toán 2: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm.

Ta có:

$$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}) + (\overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD}).$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) - \overrightarrow{AC'} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}.$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Vận dụng đẳng thức (*). Vậy hai tam giác đó có cùng trọng tâm.

Hoàn toàn tương tự học sinh có thể chứng minh các bài toán sau.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC. Gọi A',B',C' là các điểm xác định bởi:

$$1996\overrightarrow{A'B} + 2000\overrightarrow{A'C} = \vec{0},$$
$$1996\overrightarrow{B'C} + 2000\overrightarrow{B'A} = \vec{0},$$
$$1996\overrightarrow{C'A} + 2000\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài toán 4: Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1,G_2,G_3 lần lượt là trọng tâm của tam giác BCA',CAB',ABC'. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$.

Sử dụng phép tương tự có thể giúp người học tự phán đoán, suy luận và mở rộng được vấn đề từ một bài toán cụ thể giúp học sinh rèn luyện khả năng tư duy đặc biệt là tư duy liên tưởng.

2.2.4 Luyện tập cho học sinh việc liên tưởng và chuyển hóa liên tưởng từ đối tượng này sang đối tượng khác

Liên tưởng được xem là phương thức tư duy tự khám phá, tự tiếp cận và tự chiếm lĩnh kiến thức để phát triển và hoàn thiện tâm hồn, trí tuệ cũng như nhân cách học sinh.

Để giải quyết một bài toán nào đó, nếu liên tưởng được nhiều kiến thức thì việc giải quyết vấn đề đó sẽ đơn giản hơn, và đến khi bài toán đó đã được giải quyết xong rồi thì nó trở thành một kiến thức quen thuộc đối với bản thân mình và sau đó đối với những bài toán khó hơn, trong quá trình giải đôi khi ta lại liên tưởng tới cái mà ta vừa tích lũy được. Vì vậy, để luyện tập năng lực tiếp cận phát hiện vấn đề và giải quyết vấn đề của học sinh cần thiết phải quan tâm đúng mực đến việc bồi dưỡng năng lực liên tưởng của học sinh. Có thể hiểu năng lực tiếp cận phát hiện trong hoạt động tư duy toán học đặc trưng bởi khả năng liên tưởng và chuyển hóa liên tưởng từ đối tượng, quan hệ đã có sang các đối tượng mới, quan hệ mới.

Ví dụ: Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta luôn có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4} \quad (*).$$

Nếu bài toán yêu cầu học sinh chứng minh sau khi đã học các công thức lượng giác, thì việc giải quyết bài toán có thể đơn giản nếu học sinh liên tưởng đến hạ bậc, rồi liên tưởng dùng tam thức bậc hai hoặc đánh giá.

Quan sát hai vế của bất đẳng thức ở vế trái có tổng $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C$, vế phải là $\frac{9}{4}$. Như vậy giữa hai vế này có mối liên hệ như thế nào? $\sin^2A$, $\sin^2B$, $\sin^2C$ gợi cho em nhớ lại những công thức lượng giác nào?

Lúc này có thể học sinh liên tưởng đến công thức:

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1,\ \sin^2 a=1-\cos^2 a;$$

công thức hạ bậc.

Nếu học sinh lựa chọn công thức biến đổi từ hằng đẳng thức:

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A;\ \sin^2 B=1-\cos^2 B;$$

$$\sin^2 C=1-\cos^2 C,$$

thì bất đẳng thức (*) sẽ thành:

$$3-\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)\le\frac{9}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}\ (**).$$

Bất đẳng thức (**) tương tự như (*), việc chứng minh nó lại gặp khó khăn như ban đầu.

Không có năng lực liên tưởng thì sẽ không có trực giác và năng lực giải toán sẽ hạn chế, sẽ nghèo nàn về ý tưởng. Nhưng, để liên tưởng có hiệu quả thì phải có sự sàng lọc liên tưởng.

Nếu học sinh biết sử dụng công thức hạ bậc đối với $\sin^2A$, $\sin^2B$ và công thức $\sin^2C = 1 - \cos^2C$ thì bài toán sẽ có chiều hướng giải quyết đơn giản hơn. Cụ thể:

Nhờ sử dụng công thức hạ bậc và công thức $\sin^2C = 1 - \cos^2C$ thì (*) được biến đổi thành,

$$\frac{1}{2}(1-\cos\ 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos\ 2B)+\left(1-\cos^2 C\right)\le\frac{9}{4}.$$

$$\Leftrightarrow 2\ -\frac{1}{2}\left(\cos\ 2A\ +\ \cos\ 2B\right)\ -\ \cos^2 C\le\frac{9}{4}.$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{1}{2}.\ 2\ \cos(A-B).\cos(A\ +\ B)-\cos^2 C-\frac{9}{4}\le 0.$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 C+\cos(A-B).\cos C-\frac{1}{4}\le 0\quad (1).$$

Nhiều khi, việc giữ nguyên bài toán sẽ không xuất hiện liên tưởng, nhưng khi bài toán được biến đổi, tức là phát biểu bài toán dưới dạng khác thì lập tức liên tưởng xuất hiện.

Để chứng minh (1) ta thường tiến hành như thế nào? (phân tích, biến đổi vế trái thành tổng hoặc hiệu của nhóm các bình phương, hoặc thành tích; sau đó đánh giá).

Đến đây ta có thể đặt câu hỏi cho học sinh: Vế trái của bất đẳng thức (1) gợi cho em liên tưởng đến điều gì? Một cái gì đó liên quan khi giải bất phương trình thường dùng?

Học sinh dễ dàng phát hiện ra vế trái của (1) là tam thức bậc hai đối với cosC. Khi đó ta có:

$$\Delta=\cos^2(A-B)-4.\frac{1}{4}=\cos^2(A-B)-1$$

$$=-\sin^2(A-B)\le 0.$$

Lúc này học sinh có thể kết luận vế trái của (1) ≤ 0 (đúng) và được điều cần chứng minh.

Đối với học sinh khá giỏi, giáo viên có thể yêu cầu học sinh phân tích biến đổi vế trái của (1) thành biểu thức không dương.

Giáo viên mong đợi học sinh có thể biến đổi thành:

$$(1)\Leftrightarrow -[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)]^2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\ -\frac{1}{4}\le 0.$$

$$\Leftrightarrow -[\cos C\ -\frac{1}{2}\cos(A\ -B)]^2-\frac{1}{4}\left(1-\cos^2(A-B)\right)\le 0.$$

$$\Leftrightarrow -[\cos C\ -\frac{1}{2}\cos(A\ -B)]^2-\frac{1}{4}.\sin^2(A-B)\le 0.$$

$$\text{Vì: }\begin{cases}[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)]^2\ \ge 0.\\ \frac{1}{4}\sin^2(A-B)\ge 0.\end{cases}$$

Nên $-[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)]^2-\frac{1}{4}.\sin^2(A-B)\le 0$ (đúng).

Vậy (1) luôn đúng.

$$\text{Dấu “ = ” xảy ra}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2(A-B)=0\\ \cos C=\frac{1}{2}\cos\ (A-B)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\\ \cos C=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\\ C=60^o\end{cases}\Leftrightarrow\Delta\text{ ABC đều.}$$

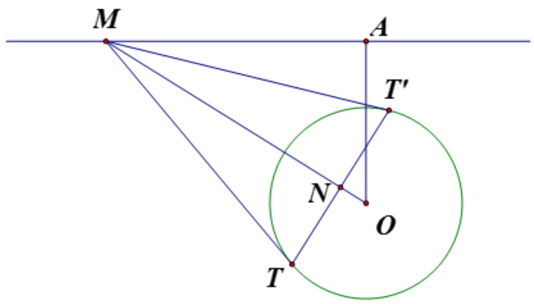
Từ kết luận của bài toán ở ví dụ trên ta có thể phát triển bài toán ban đầu thành bài toán mới:

$$\Delta \text{ ABC đều} \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{9}{4}.$$

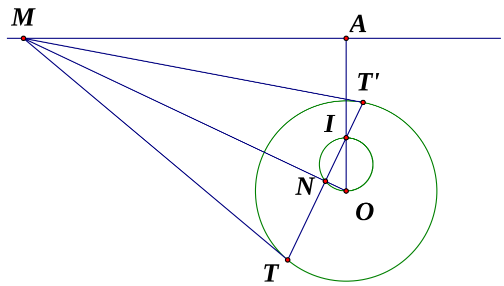
2.2.5 Sử dụng các phương tiện dạy học trực quan để học sinh tiếp cận phát hiện vấn đề

Phương tiện dạy học trực quan thường kích thích vào các giác quan của học sinh, giúp học sinh nhận ra những dấu hiệu bề ngoài của hiện tượng. Đồng thời, nó tạo ra một môi trường thuận lợi để học sinh tìm hiểu, xem xét, khám phá, để rồi từ đó đưa ra các dự đoán của mình và kiểm tra tính đúng sai của các dự đoán, tìm ra mối quan hệ giữa các yếu tố đã biết với các yếu tố đã dự đoán ở trên. Đó chính là quá trình tìm tòi, tiếp cận phát hiện vấn đề và phát hiện cách giải quyết vấn đề.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O, R) và điểm A ở ngoài đường tròn. Gọi d là đường thẳng vuông góc với OA tại A. Gọi M là một điểm trên d. Từ M vẽ hai tiếp tuyến MT, MT' với (O, R). Đoạn thẳng TT' cắt OM tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi M di động trên d. (Hình 4a).



Hình 4a: Đường tròn (O, R)



Hình 4b: Đường tròn (O, R)

Bài toán tìm quỹ tích là một bài toán khó. Điểm khó nhất của bài toán này là việc dự đoán quỹ tích. Sau khi dựng xong hình, giáo viên có thể sử dụng phần mềm dạy học Geometer's Sketchpad (gọi tắt là GSP) là phần mềm cho phép tạo ra các hình học động trong quá trình dạy toán. Phần mềm GSP có chức năng tạo vết cho điểm. Vì vậy, ta có thể tạo vết cho điểm N, sau đó cho M chạy trên d thì N sẽ quét ra một đường tròn, nghĩa là quỹ tích của điểm N là đường tròn (Hình 4b). Từ đó người học tìm được định hướng giải bài toán.

3 THỰC NGHIỆM

3.1 Mục đích thực nghiệm

Thực nghiệm sư phạm được tiến hành nhằm mục đích kiểm nghiệm tính khả thi và tính hiệu quả của việc nghiên cứu một số phương thức hoạt động của học sinh theo hướng tiếp cận phát hiện trong dạy học định lý và dạy học giải bài tập hình học 10.

3.2 Nội dung thực nghiệm

Trong phạm vi nghiên cứu của đề tài này tôi tiến hành tìm hiểu thực trạng dạy học toán theo hướng tiếp cận phát hiện vấn đề và phát hiện cách giải quyết vấn đề trong dạy học định lý và dạy học giải bài tập hình học 10 ở trường trung học phổ thông.

3.3 Phương pháp tiến hành

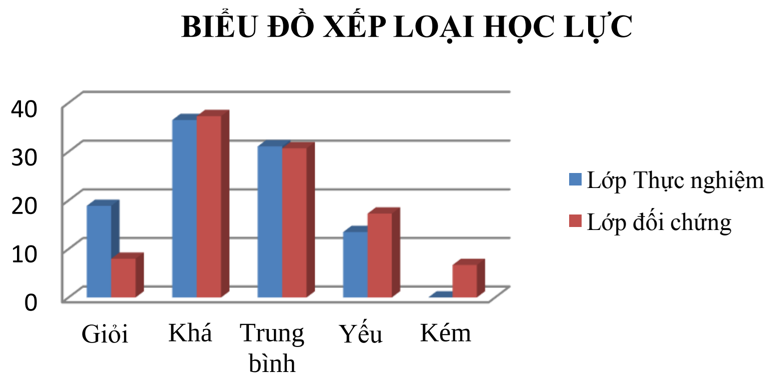
Thực nghiệm sư phạm được tiến hành tại Trường Trung học Phổ thông Tân Quới, xã Tân Quới, huyện Bình Tân, tỉnh Vĩnh Long. Trong đó, lớp thực nghiệm là lớp 10_3 với 36 học sinh và lớp 10_6 với 38 học sinh còn lớp đối chứng là lớp 10_2 với 37 học sinh và 10_7 với 38 học sinh.

Sau khi dạy xong thực nghiệm, ở mỗi lớp tôi cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút để đánh giá hiệu quả của phương pháp giảng dạy.

3.4 Kết quả thực nghiệm

Qua số liệu (Bảng 1, Hình 5) bước đầu ta có bảng nhận xét như sau:

Tỉ lệ học sinh đạt từ điểm trung bình trở lên của lớp thực nghiệm là: 86.5% và lớp đối chứng là 76%. Điều này chứng tỏ phương pháp và cách tổ chức thực hiện của GV ở lớp các thực nghiệm đã phát huy hiệu quả cao hơn phương pháp thực hiện ở các lớp đối chứng, góp phần nâng cao kết quả học tập của học sinh.



Hình 5: Biểu đồ so sánh kết quả học lực giữa các lớp đối chứng và thực nghiệm

Bảng 1: Kết quả xếp loại học lực của các lớp đối chứng và thực nghiệm

Xếp loại	Thực nghiệm		Đối chứng	
	SL	TL (%)	SL	TL (%)
Giỏi (9-10)	14	18.9%	6	8.0%
Khá (7-8)	27	36.5%	28	37.3%
Trung bình (5-6)	23	31.1%	23	30.7%
Yếu (3-4)	10	13.5%	13	17.3%
Kém (1-2)	0	0.0%	5	6.7%
Tổng	74	100%	75	100%

Từ đó chúng tôi đặt ra vấn đề là: "Có phải phương pháp luyện tập cho học sinh cách phát hiện vấn đề và phát hiện cách giải quyết vấn đề ở các lớp thực nghiệm đã đem lại hiệu quả tốt hơn so với phương pháp dạy học thông thường ở các lớp đối chứng hay chỉ do ngẫu nhiên mà có".

Để khẳng định vấn đề trên, chúng tôi thực hiện bài toán kiểm định giả thiết sau với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

Giả thuyết H_0: "Hiệu quả của hai phương pháp dạy học ở các lớp thực nghiệm và các lớp đối chứng là như nhau".

Đối giả thuyết H_1:"Phương pháp dạy học ở các lớp thực nghiệm mang lại hiệu quả tốt hơn phương pháp dạy học ở các lớp đối chứng".

Chúng tôi dùng phần mềm Microsoft Excel để thống kê và kiểm định z – test thì kết quả thể hiện như sau:

Bảng 2: Bảng thống kê mô tả các lớp thực nghiệm và đối chứng

LỚP THỰC NGHIỆM		LỚP ĐỐI CHỨNG	
Mean	**6.912162162**	**Mean**	**6.173333333**
Standard Error	0.215202932	Standard Error	0.233171115
Median	7	Median	6.5
Mode	7	Mode	7
Standard Deviation	1.851245616	Standard Deviation	2.019321088
Sample Variance	**3.42711033**	**Sample Variance**	**4.077657658**
Kurtosis	-0.774299167	Kurtosis	-0.768114156
Skewness	-0.158444845	Skewness	-0.362178347
Range	7	Range	8
Minimum	3	Minimum	2
Maximum	10	Maximum	10
Sum	511.5	Sum	463
Count	**74**	**Count**	**75**
Confidence Level (95.0%)	0.428898818	Confidence Level (95.0%)	0.464603581

Bảng 3: Bảng kiểm định giả thuyết z-Test của các lớp thực nghiệm và đối chứng

z-Test: Two Sample for Means		
	Thực nghiệm	***Đối chứng***
Mean	**6.912162162**	**6.173333333**
Known Variance	**3.42**	**4.07**
Observations	**74**	**75**
Hypothesized Mean Difference	0	
z	**2.330761254**	
P(Z<=z) one-tail	0.009882976	
z Critical one-tail	1.644853627	
P(Z<=z) two-tail	0.019765952	
z Critical two-tail	**1.959963985**	

Do $z = 2.33 > 1.96$ nên bác bỏ giả thuyết H_0 và chấp nhận đối giả thuyết H_1. Điều này có nghĩa là "*Phương pháp ở lớp thực nghiệm đem lại hiệu quả tốt hơn phương pháp ở lớp đối chứng*".

4 KẾT LUẬN

Các ví dụ trên đây cùng với kết quả thực nghiệm sư phạm ở trường phổ thông đã khẳng định các ưu điểm, tính khả thi, và hiệu quả của các biện pháp đưa ra. Bên cạnh đó kết quả thực nghiệm còn cho thấy việc nghiên cứu các hoạt động của học sinh theo hướng tiếp cận phát hiện là có ý nghĩa trong việc giúp học sinh phát hiện được vấn đề và phát hiện được cách giải quyết vấn đề.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên), 2006. Hình học 10. Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội.
2. Nguyễn Bá Kim, 2004. Phương pháp dạy học môn toán. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm. Hà Nội.
3. Nguyễn Phú Lộc, 2008. Giáo trình xu hướng dạy học không truyền thống. Tủ sách Đại học Cần Thơ. Thành phố Cần Thơ.
4. Hoàng Phê, 1996. Từ điển tiếng Việt. Nhà xuất bản Đà Nẵng.
5. Hồ Văn Quảng, 2011. Một số phương thức tiếp cận phát hiện trong dạy học giải bài tập toán. Luận văn thạc sĩ. Đại học Vinh.
6. Đào Tam (Chủ biên), 2008. Lê Hiển Dương. Tiếp cận các phương pháp dạy học không truyền thống trong dạy học Toán ở trường Đại học và trường Phổ thông. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm. Hà Nội.