Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU THỨ HAI ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TRONG HÌNH TRỤ VỚI ĐÁY KHÔNG TRƠN

Phùng Kim Chức[1]

[1] *Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 15/05/2015
Ngày chấp nhận: 17/08/2015

Title:
The solvability of this seccond innitial the second initial boundary problem for hyperbolic equation in cylinders with nonsmooth bases

Từ khóa:
Bài toán biên ban đầu thứ hai, Nghiệm suy rộng, Hình trụ đáy không trơn

Keywords:
Second initial boundary value problem; generalized solution; cylinders with nonsmooth bases

ABSTRACT

In this paper, we study the second initial boundary value problem for hyperbolic equations in cylinders with nonsmooth bases. We present the results of the unique solvability of generalized solution of the problem.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về Bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình hyperbolic trong hình trụ với đáy không trơn. Bài báo trình bày kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán.

1 MỞ ĐẦU

Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình hyperbolic mạnh trong miền trụ với đáy không trơn. Cấu trúc của bài gồm 5 mục, mục 1 giới thiệu các kí hiệu, các không gian hàm và toán tử vi phân sử dụng trong bài báo, mục 2 đặt bài toán và giới thiệu một số các kết quả chính, mục 3 và 4 dùng để chứng minh các kết quả nêu ở mục 2.

Mục 5 nêu một số hướng nghiên cứu tiếp tục trên cơ sở các kết quả đã đăng trong bài báo.

Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ với biên của nó là $\partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện $\Gamma = \partial\Omega \setminus \{O\}$ là mặt khả vi vô hạn và Ω trùng với nón $K = \{x : \frac{x}{|x|} \in G\}$ trong lân cận của gốc tọa độ O, ở đó G là một miền trơn trong mặt cầu đơn vị S^{n-1} của $\mathbb{R}^n$.

Với mỗi số thực dương T, đặt $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $\Omega_\infty = \Omega \times (0,\infty)$, $\overline{\Omega}_\infty = \overline{\Omega} \times (0,\infty)$.

Với mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ta đặt $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ và kí hiệu $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Với mỗi hàm véc tơ giá trị phức $u = (u_1,...,u_s)$ xác định trong Ω, ta kí hiệu $D_u^\alpha = (D_{u_1}^\alpha,...,D_{u_s}^\alpha)$,

$$u_{t^j} = \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = (\frac{\partial^j u_1}{\partial t^j},...,\frac{\partial^j u_s}{\partial t^j}),\ |u| = (\sum_{j=1}^{s} |u_j|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Giả sử l là một số nguyên không âm, trong bài báo này chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau.

$C^l(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp $l > 0$ trên Ω.

$C(\Omega) = C^0(\Omega)$ là không gian các hàm liên tục trên Ω.

$C^\infty(\Omega) = \bigcup_{l=0}^{\infty} C^l(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn trên Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω.

$L_2(\Omega)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω với chuẩn

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}.$$

$L_2(\gamma,\Omega_T)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω_T với chuẩn

$$\| u \|_{L_2(e^{\gamma t},\Omega_T)} = (\int_{\Omega_T} |u(x,t)|^2 e^{-2\gamma t} dxdt)^{\frac{1}{2}}.$$

$H^l(\Omega)$ là không gian gồm các hàm vectơ $u(x)$ có đạo hàm suy rộng $D^p u \in L_2(\Omega), |p| \le l$, với chuẩn

$$\|u\|_{H^l(\Omega)} = (\int_\Omega \sum_{|p|\le l} |D^p u|^2\, dx)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

$H^{l,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)(\gamma \in \mathbb{R})$ là không gian gồm các hàm $u(x,t), (x,t) \in \Omega_T$ có đạo hàm suy rộng $D^p u, |p| \le l$ với chuẩn

$$\|u\|_{H^{l,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)} = (\int_{\Omega_T} \sum_{|p|\le l} |D^p u|^2 e^{-2\gamma t} dxdt)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Đặc biệt, chúng ta đặt $L_2(\gamma,\Omega_T) = H^{0,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)$.

$H^{l,1}(e^{\gamma t},\Omega_T)(\gamma \in \mathbb{R})$ là không gian gồm các hàm $u(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T$ có đạo hàm suy rộng $D^p u, |p| \le l$ với chuẩn

$$\|u\|_{H^{l,1}(e^{\gamma t},\Omega_T)} = (\int_{\Omega_T} \sum_{|p|\le l} (|D^p u|^2 + |u_t|^2) e^{-2\gamma t} dxdt)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$L^\infty(0,T;L_2(\Omega))$ là không gian gồm các hàm giá trị phức đo được $u:(0,T) \to L_2(\Omega), t \mapsto u(.,t)$ thỏa mãn

$$\| u \|_{L^\infty(0,T;L_2(\Omega))} = \operatorname*{ess\ sup}_{0<t<T} \| u(.,t) \|_{L_2(\Omega)}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu toán tử vi phân sử dụng trong suốt bài báo

$$L = L(x,t,D) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}) + a, \qquad (1.1)$$

Ở đó $a_{ij} \equiv a_{ij}(x,t),\ i,j = 1,...,n$ là các hàm giá trị phức bị chặn khả vi vô hạn trong $\overline{\Omega}_\infty$ và $a \equiv a(x,t)$ là hàm giá trị thực bị chặn khả vi vô hạn trong $\overline{\Omega}_\infty$. Hơn nữa chúng ta giả sử $a_{ij}(x,t) = \overline{a}_{ji}(x,t)$ với mọi $i,j = 1,...,n$, điều này có nghĩa là toán tử L tự liên hợp hình thức. Giả sử rằng $a_{ij}, i, j = 1,...,n$ liên tục theo $x \in \overline{\Omega}$ đều với $t \in [0,\infty)$ và tồn tại một hằng số dương α_0 sao cho

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \alpha_0 |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (x,t) \in \overline{\Omega}_\infty. \quad (1.2)$$

2 ĐẶT BÀI TOÁN VÀ CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 2$) với biên của nó là $\partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện $\Gamma = \partial\Omega \setminus \{0\}$ là mặt khả vi vô hạn. Hơn nữa ta giả sử rằng Ω trùng với nón $K = \{x : \frac{x}{|x|} \in G\}$ trong lân cận nào đó của gốc tọa độ O, ở đó G là một miền trơn trong mặt cầu đơn vị S^{n-1} của $\mathbb{R}^n$. Kí hiệu: $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ $(T > 0)$.

Trong hình trụ Q_T, $0 < T \le \infty$, chúng ta xét bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình hyperbolic cấp hai:

$$L(x,t,D)u - u_{tt} = f(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_T\,, \qquad (2.1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega \qquad (2.2)$$

$$Nu\big|_{S_T} = 0, \qquad (2.3)$$

ở đó $f(x,t)$ là vectơ hàm giá trị phức, $L(x,t,D)$ là toán tử (1.1) đã giới thiệu ở trên,

$$Nu = N(x,t,D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(x_i, v)\,,$$

v là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài đến S_T.

Hàm vectơ $u(x,t)$ được gọi là nghiệm suy rộng trong không gian $H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)$ của bài toán (2.1) − (2.3) nếu $u(x,t) \in H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T), u(x,0) = 0$ và với mỗi τ, $0 < \tau < T$, đẳng thức sau:

$$\int_{Q_\tau} u_t \overline{\eta}_t dxdt - \int_{Q_\tau} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial \eta}}{\partial x_i} - au\overline{\eta}\Big)dxdt = \int_{Q_\tau} f\overline{\eta}dxdt \qquad (2.4)$$

đúng với mọi hàm thử $\eta \in H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)$, sao cho $\eta(x,t) = 0$, $t \in [\tau, T)$.

Định lý 2.1 (Định lí về tính duy nhất nghiệm của bài toán). Giả sử các hệ số của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và

$$\left\{\Big|\frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}\Big|, \Big|\frac{\partial^k a}{\partial t^k}\Big|\right\} \le \mu, i, j = 1,...,n, k \le 1,$$

$$\forall (x,t) \in \overline{Q}_T, \mu = \text{const} > 0$$

Thì bài toán (2.1)-(2.3) có không quá một nghiệm suy rộng trong không gian $H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)$ với mọi $\gamma > 0$.

Định lý 2.2 (Định lí về sự tồn tại của nghiệm suy rộng). Giả sử các hệ số của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và

i) $\left\{\Big|\frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}\Big|, \Big|\frac{\partial^k a}{\partial t^k}\Big|\right\} \le \mu, i, j = 1,...,n, k \le 1,$

$\forall (x,t) \in \overline{Q}_T, \mu = \text{const} > 0$

ii) $f \in L^\infty(0,\infty; L_2(\Omega))$,

iii) $f(x,0) = 0$

Thế thì tồn tại một hằng số γ_0 sao cho với mỗi $\gamma > \gamma_0$, bài toán (2.1)-(2.3) có duy nhất một nghiệm suy rộng $u(x,t)$ trong không gian $H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)$. Hơn nữa bất đẳng thức sau đúng

$$\| u \|_{H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_\infty)} \le C \| f \|^2_{L^\infty(0,\infty; L_2(\Omega))}$$

ở đó C là hằng sốt dương không phụ thuộc vào u và f.

Chứng minh Định lí 2.1

Để chứng minh Định lí 2.1 trước tiên ta giới thiệu các bổ đề sau mà có thể tìm thấy cách chứng minh nó trong Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2010).

Bổ đề 3.1: Giả sử các hệ số $a_{ij} = a_{ij}(x,t), i, j = 1,...,n, a = a(x,t)$ của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và $a_{ij}(x,t)$ liên tục theo $x \in \overline{\Omega}$ đều với $t \in [0,\infty)$. Thì tồn tại hai hằng số $\mu_0 > 0$ và $\lambda_0 \ge 0$ sao cho

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial u}}{\partial x_i}dx - \int_\Omega au\overline{u}dx \ge \mu_0 \| u \|_{H^1(\Omega)} - \lambda_0 \| u \|_{L^2(\Omega)}$$

với mọi u=u(x,t) $\in H^{1,0}(e^{\gamma t}, Q_T)$.

Bổ đề 3.2 (Bất đẳng thức Gronwall-Bellman) Giả sử u(t) và $\phi(t)$ là những hàm khả tích không âm trên đoạn [0,T] và $\phi(t)$ có đạo hàm $\phi'(t)$ khả tích trên [0,T] sao cho

$$u(t) \le \phi(t) + L\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

với mọi $t \in [t_0, T], t_0 \ge 0$, ở đó L là hằng số dương. Thì

$$u(t) \le \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{L(t-\tau)}\phi'(\tau)d\tau$$

với mọi $t \in [t_0, T]$.

Bây giờ ta chúng minh Định lí 2.1.

Giả sử tồn tại $\gamma > 0$ bài toán (2.1) – (2.3) có hai nghiệm suy rộng u_1 và u_2. Đặt $u = u_1 - u_2 \in H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)$. Khi đó u thỏa mãn đồng nhất thức tích phân (2.4) với $f = 0$ và $u(x,0) = 0$. Định nghĩa hàm $\eta(x,t)$ như sau:

$$\eta(x,t) = \begin{cases} 0 & b \le t \le T \\ \int_b^t u(x,\tau)d\tau & 0 \le t \le b \end{cases} \tag{2.5}$$

Không khó khăn ta kiểm tra được $\eta(x,t) \in H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)$, $\eta(x,t) = 0$ với $t \in [b,T)$ và có $\eta_t(x,t) = u(x,t)$ với mọi $(x,t) \in Q_b$.

Thay $u = \eta_t$ và chọn hàm thử lại chính hàm η đã chọn ở trên vào (2.4) với $f = 0$, ta nhận được.

$$\int_{Q_b} \eta_{tt}\overline{\eta_t}\,dxdt - \int_{Q_b} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \eta_t}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial \eta}}{\partial x_i} - a\eta\overline{\eta}\Big)dxdt = 0 \tag{3.1}$$

Cộng đẳng thức (3.1) với liên hợp phức của nó ta được

$$2\,\mathrm{Re}\int_{Q_b} \eta_{tt}\overline{\eta_t}\,dxdt - 2\,\mathrm{Re}\int_{Q_b} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \eta_t}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial \eta}}{\partial x_i} - a\eta_t\overline{\eta}\Big)dxdt = 0 \tag{3.2}$$

Nhờ tích phân từng phần và điều kiện $u(x,0) = 0$, $\partial u(x,0)/\partial x_i = 0$, ta nhận được đẳng thức sau:

$$2\,\mathrm{Re}\int_{Q_b} \eta_{tt}\overline{\eta_t}\,dxdt = \int_{Q_b} \frac{\partial}{\partial t}(\eta_t\overline{\eta_t})dt = \| \eta_t(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Sử dụng Bổ đề 3.1 ta được

$$\| \eta_t(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)} - \int_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial \eta}}{\partial x_i} - a\eta\overline{\eta}\Big)\Big|_{t=0} dx + \lambda_0 \| \eta(.,0) \|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$= -\int_{Q_b} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial \eta}}{\partial x_i} - \frac{\partial a}{\partial t}\eta\overline{\eta}\Big)dxdt + \lambda_0 \| \eta(.,0) \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.3}$$

Sử dụng Bổ đề 3.1 và bất đẳng thức Cauchy đánh giá các số hạng của (3.3) ta được

$$\| \eta_t(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_0 \| \eta(.,0) \|^2_{H^1(\Omega)} \le$$

$$n\mu \int_0^b \| \eta(.,t) \|^2_{H^1(\Omega)} dt + \lambda_0 \| \eta(.,0) \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.4}$$

Bây giờ chúng ta đặt

$$v_i(x,t) = \int_t^0 \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x_i} d\tau, 0 < t < 0, i = 1,...,n,$$

$$v_0(x,t) = \int_t^0 u(x,\tau)d\tau$$

Với cách đặt như trên ta có

$$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x_i} = \int_b^t \frac{\partial \eta(x,\tau)}{\partial x_i} d\tau = v_i(x,b) - v_i(x,t), i =$$

$$1,...,n, \eta(x,t) = v_0(x,b) - v_0(x,t)$$

$$\frac{\partial \eta(.,0)}{\partial x_i} = v_i(x,b), i = 1,...,n, \eta(.,0) = v_0(x,b)$$

$$\| \eta(.,0) \|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{i=0}^{n} \| v_i(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.5}$$

$$\int_0^b \| \eta(.,t) \|^2_{H^1(\Omega)} dt \le b\sum_{i=0}^{n} \| v_i(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+ \int_0^b \sum_{i=0}^{n} \| v_i(.,t) \|^2_{L_2(\Omega)} dt \tag{3.6}$$

Mặt khác

$$\lambda_0 \| \eta(.,0) \|^2_{L_2(\Omega)} = 2\lambda_0\,\mathrm{Re}\int_b^0\int_\Omega \eta_t(x,t)\overline{\eta(x,t)}dxdt$$

$$\le \int_0^b \| \eta_t(.,t) \|^2_{L_2(\Omega)} dt + \lambda_0^2 b \| v_0(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+ \lambda_0^2 \int_0^b \| v_0(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)} dt \tag{3.7}$$

Từ (3.5)-(3.7) và bất đẳng thức (3.4) ta có bất đẳng thức sau

$$\| \eta_t(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0 - bC_1)\sum_{i=0}^{n} \| v_i(.,b) \|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$\le C_2 \int_0^b \Big(\| \eta_t(x,t) \|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} \| v_i(x,t) \|^2_{L_2(\Omega)}\Big)dt \tag{3.8}$$

ở đó C_1, C_2 là các hằng số dương. Bây giờ chúng ta đặt

$$J(t) = \|\eta_t(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} \|v_i(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

ta nhận được $J(b) \le C\int_0^b J(t)dt, \quad C = const > 0$ với hầu khắp $b \in [0, \frac{\mu_0}{2C}]$. Áp dụng Bất đẳng thức Gronwall-Bellman ta được $J(b) = 0$ với hầu khắp $b \in [0, \frac{\mu_0}{2C}]$, do đó $u(x,b) = 0$ với hầu khắp $b \in [0, \frac{\mu_0}{2C}]$. Dùng lí luận tương tự như trên với $b \in [\frac{\mu_0}{2C}, \frac{\mu_0}{C}]$ chúng ta chứng minh được rằng $u(x,b) = 0$ với hầu khắp $b \in [\frac{\mu_0}{2C}, \frac{\mu_0}{C}]$. Vì đoạn $[0,T]$ là hữu hạn nên lặp lại quá trình trên sau một số bước ta được $u(x,b) = 0$ với hầu khắp $b \in [0,T]$. Mặt khác, vì T là số dương bất kỳ nên ta có kết luận $u_1(x,b) = u_2(x,b)$.

Định lí được chứng minh.

3 CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ 2.2

Sự duy nhất nghiêm của bài toán được suy ra từ Định lí 2.1.

Sự tồn tại nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3) được chứng minh nhờ phương pháp xấp xỉ Galerkin.

Giả sử $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ là một hệ hàm trong $H^1(\Omega)$ sao cho bao đóng tuyến tính của nó lại chính là $H^1(\Omega)$ và một hệ trực chuẩn trong $L_2(\Omega)$. Với mỗi số nguyên dương N ta xét hàm $u^N = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi_k(x)$ ở đó $(C_1^N(t),...,C_N^N(t))$ là Nghiệm của hệ phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\overline{\varphi_l}dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}} - au^N\overline{\varphi_l})dx = -\int_\Omega f\overline{\varphi_l}dx \quad (4.1)$$

với điều kiện ban đầu là

$$C_k^N(0) = \frac{d}{dt}C_k^N(0) = 0, k = 1,..., N. \quad (4.2)$$

Nhân đẳng thức (4.1) với $\overline{\frac{dC_l^N(t)}{dt}}$ và lấy tổng theo l từ 0 đến N, ta nhận được:

$$\int_\Omega u_{tt}^N\overline{u_t^N}dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_t^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u_t^N})dx = -\int_\Omega f\overline{u_t^N}dx \quad (4.3)$$

Giả sử τ là một số dương, $\tau < T$, tích phân hai vế của (4,3) theo t từ 0 đến τ ta được

$$\int_{Q_\tau} u_{tt}^N\overline{u_t^N}dxdt + \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_t^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u_t^N})dxdt = -\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \quad (4.4)$$

Cộng (4.4) với liên hợp phức của nó ta có

$$2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} u_{tt}^N\overline{u_t^N}dxdt + 2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_t^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u_t^N})dxdt = -2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \quad (4.5)$$

Từ đây, tích phân từng phần (4.5) với điều kiện (4.2) ta nhận được

$$\int_\Omega |u_t^N(.,\tau)|^2 dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx$$
$$= \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - \frac{\partial a}{\partial t}u^N\overline{u^N})dxdt - 2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \quad (4.6)$$

Cộng $\lambda_0 \int_{Q_\tau} \frac{\partial(u^N\overline{u^N})}{\partial t}dxdt$ vào hai vế của (4.6) và sử dụng tích phân từng phần ta được

$$\int_\Omega |u_t^N(.,\tau)|^2 dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx$$
$$+\lambda_0\int_\Omega (u^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx = \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - \frac{\partial a}{\partial t}u^N\overline{u^N})dxdt \quad (4.7)$$
$$+\lambda_0\int_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^N\overline{u^N})dxdt - 2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt$$

Chúng ta có

$\frac{\partial(u^N\overline{u^N})}{\partial t} = u_t^N\overline{u^N} + u^N\overline{u_t^N} = 2\operatorname{Re}(u^N\overline{u_t^N})$. Do đó

$$\int_\Omega |u_t^N(.,\tau)|^2 dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial u^N}}{\partial x_i} - au^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx$$
$$+\lambda_0 \int_\Omega (u^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx = \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial u^N}}{\partial x_i} - \frac{\partial a}{\partial t}u^N\overline{u^N})dxdt \quad (4.8)$$
$$+2\operatorname{Re}\lambda_0 \int_{Q_\tau} (u^N\overline{u_t^N})dxdt - 2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt$$

Áp dụng bổ đề (3.1) và Bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\| u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_0 \| u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$\le \int_{Q_\tau} (n\mu \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u^N}{\partial x_i}|^2 + \mu |u^N|^2)dxdt$$
$$+ \int_{Q_\tau} ((n-1)\mu + \varepsilon)|u^N|^2 dxdt$$
$$+ \int_{Q_\tau} (\frac{\lambda_0^2}{(n-1)\mu+\varepsilon}|u_t^N|^2 + \delta |u_t^N|^2)dxdt$$
$$+ \frac{\tau}{\delta}\| f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}$$
$$\le \int_{Q_\tau} (n\mu \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u^N}{\partial x_i}|^2 + \mu |u^N|^2)dxdt$$
$$+ \int_{Q_\tau} ((n-1)\mu + \varepsilon)|u^N|^2 dxdt$$
$$+ \int_{Q_\tau} (\frac{\lambda_0^2}{(n-1)\mu}|u_t^N|^2 + \delta |u_t^N|^2)dxdt$$
$$+ \frac{\tau}{\delta}\| f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}$$

ở đó $\varepsilon > 0$, $\delta = const > 0$ chỉ phụ thuộc vào ε. Từ đó ta có

$$\| u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_0 \| u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$\le \frac{\lambda_0^2 + \delta(n-1)\mu}{(n-1)\mu}\int_0^\tau (\| u_t^N(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$+\frac{(n\mu+\varepsilon)(n-1)\mu}{\lambda_0^2+\delta(n-1)\mu}\| u^N(x,t)\|^2_{H^1(\Omega)})dt \quad (4.9)$$
$$+\frac{\tau}{\delta}\| f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}$$

Xét hàm: $\delta(\varepsilon) = \dfrac{(n\mu+\varepsilon)(n-1)\mu - \lambda_0^2\mu_0}{(n-1)\mu_0\mu}$.

Ta có $\delta'(\varepsilon) = \dfrac{1}{\mu_0} > 0$ do đó $\inf_{\varepsilon>0}\{\delta(\varepsilon)>0\}$

$= max\{\delta(0), 0\}$.

Nếu $\delta(0) > 0$ thì $\delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$

Nếu $\delta(0) \le 0$ thì $\lambda_0^2\mu_0 - n(n-1)\mu^2 \ge 0$ và

$\delta(\varepsilon) > 0$ khi $\varepsilon > \dfrac{\lambda_0^2\mu_0 - n(n-1)\mu^2}{(n-1)\mu_0\mu}$

Đặt

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 0 & khi\ \delta(0) > 0 \\ \dfrac{\lambda_0^2\mu_0 - n(n-1)\mu^2}{n(n-1)\mu_0\mu} & khi\ \delta(0) \le 0 \end{cases}$$

ta có $\delta(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > \varepsilon_0$.

Giả sử ε là hằng số dương sao cho $\varepsilon > \varepsilon_0$ thế

thì $\delta = \dfrac{(n\mu+\varepsilon)(n-1)\mu - \lambda_0^2\mu_0}{(n-1)\mu_0\mu} > 0$

Từ đó ta có

$$\frac{\lambda_0^2 + \delta(n-1)\mu}{(n-1)\mu} = \frac{n\mu+\varepsilon}{\mu_0} \quad (4.10)$$

Đặt

$$J^N(t) = \| u_t^N(.,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_0 \| u^N(.,t)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

từ (4.9) và (4.10) ta nhận được

$$J^N(\tau) \le \frac{n\mu+\varepsilon}{\mu_0}\int_0^\tau J^N(t)dt + \tau C(\varepsilon)\| f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}$$

ở đó $C(\varepsilon)$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào ε. Từ bất đẳng thức này và Bổ đề 3.2 ta có

$$J^N(\tau) \le \int_0^\tau e^{(n\mu+\varepsilon)(\tau-t)/\mu_0} C(\varepsilon)\| f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))} dt$$

ở đó C là hằng số không phụ thuộc vào *N* và *f*. Điều này nghĩa là

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_0 \|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \le Ce^{(n\mu+\varepsilon)\tau/\mu_0} \|f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))} \quad (4.11)$$

Kí hiệu $\gamma_0 = (n\mu + \varepsilon_0)/2\mu_0$. Giả sử là một hằng số dương sao cho $\gamma > \gamma_0$ thì tồn tại một hằng số dương $\varepsilon > \varepsilon_0$ sao cho $\gamma > \gamma(\varepsilon) = \frac{n\mu+\varepsilon}{2\mu_0} > \gamma_0 = \frac{n\mu+\varepsilon_0}{2\mu_0}$. Nhân cả hai vế của (4.11)

với $e^{-2\gamma\tau}$, sau đó lấy tích phân theo biến τ từ 0 đến ∞ ta được

$$\|u^N\|^2_{H^{1,1}(e^{-\gamma t},Q_\infty)} \le C\|f\|^2_{L^\infty(0,\infty:L_2(\Omega))} \quad (4.12)$$

ở đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào N và f.

Từ (4.12) suy ra $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ là một dãy bị chặn đều trong không gian $H^{1,1}(e^{-\gamma t}, Q_\infty)$.

Do đó tồn tại một dãy con của dãy $\{u^N\}$ (ta vẫn dùng ký hiệu là $\{u^N\}$) hội tụ yếu trong $H^{1,1}(e^{-\gamma t}, Q_\infty)$ tới một hàm $u(x,t) \in H^{1,1}(e^{-\gamma t}, Q_\infty)$.

Bây giờ ta chứng minh $u(x,t)$ là nghiệm suy rộng của bài toán (2.1) – (2.3) trong không gian $H^{1,1}(e^{-\gamma t}, Q_\infty)$. Thật vậy, do $u^N(x,0) = 0$ nên dễ dàng chứng minh được $u(x,0) = 0$ trong Ω, tức là điều kiện ban đầu được thỏa mãn. Ta còn phải đi chứng minh hàm $u(x,t)$ thỏa mãn hệ thức (2.4).

Nhân cả hai vế (4.1) với $d_l(t) \in H^1(0,T)$, $d_l(t) = 0$. Lấy tổng đẳng thức nhận được theo tất cả l từ 1 đến N và lấy tích phân theo t từ 0 đến T. Sau đó lấy tích phân từng phần theo t số hạng đầu tiên. Kết quả nhận được:

$$\eta = \sum_{i=1}^N d_l(t)\varphi_l(x)$$

$$\int_{Q_T} u_t^N \overline{\eta}_t dxdt - \int_{Q_T} \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial \eta}{\partial x_i}} - au^N\overline{\eta}\Big)dxdt = \int_{Q_T} f\overline{\eta}dxdt$$

Qua giới hạn với dãy hội yếu khi N dần tới ∞, chúng ta nhận được

$$\int_{Q_T} u_t \overline{\eta}_t dxdt - \int_{Q_T} \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial \eta}{\partial x_i}} - au\overline{\eta}\Big)dxdt = \int_{Q_T} f\overline{\eta}dxdt \quad (4.13)$$

Ký hiệu M_N là tập hợp tất cả phần tử dạng

$$M_N = \{\eta = \sum_{i=1}^N d_l(t)\varphi_l(x),\ d_l(t) \in H^1(0,T),\ d_l(T) = 0\}$$

$$\widehat{H}^{1,1}(Q_T) = \{\eta(x,t) \in H^{1,1}(Q_T), \eta(x,T) = 0\}$$

và $M = \bigcup_{N=1}^\infty M_N$, thì tập hợp M trù mật trong $\widehat{H}^{1,1}(Q_T)$. Từ đó suy ra (4.13) đúng với $\eta \in H^{1,1}(Q_T)$, thỏa mãn điều kiện $\eta(x,t) = 0$ với $t \in [T,\infty)$. Hơn nữa ta có

$$\|u\|^2_{H^{1,1}(e^{-\gamma t},Q_\infty)} \le C\|f\|^2_{L^\infty(0,\infty:L_2(\Omega))}$$

Định lý được chứng minh.

4 MỘT SỐ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP TỤC

Bài toán đã xét với hình trụ đáy chứa điểm nón với phương pháp nghiên cứu tương tự ta có thể trình bày bài toán cho hình trụ với đáy không trơn chẳng hạn như miền có tính chất đoạn hay hình trụ Lipschitz Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2012),...

Chúng ta có thể thay đổi γ_0 để được không gian nghiệm rộng hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2014), " Asymptotic of solutions for second IBVP for hyperbolic systems in non-smooth domains ".Vol. 93, No. 5,
2. pp. 1010-1035. Applicable Analysis 2014.
3. Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2012), " On the smoothness of the solution for the initial - Neumann problem for hyperbolic systems in Lipschitz cylinders ". Vol. 16, No. 5,pp. 1629-1645,October 2012.\; Taiwanese Journal of Mathematics.

4. Nguyen Manh Hung, Nguyen Thanh Anh and Phung Kim Chuc (2011), " On the regularity of the solution for the second initial boundary value problem for hyperbolic systems in domains with conical points", Boundary Value Problems, (doi:10.1186/1687-2770-2011-17) .
5. Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2010), " The smoothness with respect to time variable of the solution for the second innitial boundary problem for hyperbolic systems in infinite cylinders with non-smooth base ". Vol 5. Number 2. 2010, pp. 117-134. International Journal of Evolution Equations.
6. M. S. Agranovich (1997), Elliptic boundary problems. in: M. S. Agranovich. Yu. V. Egrov, M. A. Shubin (Eds.) Partial Differential Equations,IX, of Encyclopaedia Math. Sci. Springer, Berlin **79** , pp. 1144.
7. N. M. Hung (1989), "On the smoothness of solution of the mixed boundary value problem for the second order hyperbolic equation in a neighbourhood of an edge", Acta. Math. Viet., 14(2), pp. 99 - 113.
8. M. Dauge (1988), Elliptic boundary value problems on corner domains, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.
9. D. Ginbarg and N. Trudinger (1983), Elliptic partial differential equation of second order, Springer -Verlag, Berlin - New York.
10. R. A. Adams (1975), Sobolev spaces, Academic Press.