Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Nguyễn Thị Tuyền[1]

[1] *Học viên cao học lớp Lý luận và phương pháp dạy học bộ môn Toán, khóa 19, Khoa Sư phạm*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 29/04/2014
Ngày chấp nhận: 29/08/2014

Title:
Applying the coordinate method toward the stereometric problems

Từ khóa:
Phương pháp tọa độ, tọa độ hóa

Keywords:
Coordinate method, coordinates chemical

ABSTRACT

Stereometry is an important part of the mathematics curriculum high school today.The stereometric problems are pretty complicated, requiring learners to have good and critical thinking. Solving some stereometric problems is relatively difficult and takes more time, but the use of coordinate method will make them much simpler. In this article, we would like to introduce how to apply coordinates method toward the stereometric problems.

TÓM TẮT

Hình học không gian là một bộ phận quan trọng của chương trình toán trung học phổ thông hiện nay. Các bài toán hình học không gian khá phức tạp, đòi hỏi người học phải có tư duy tốt. Việc giải một số bài toán hình học không gian tương đối khó và tốn nhiều thời gian nhưng nếu giải theo phương pháp tọa độ sẽ đơn giản hơn. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu cách vận dụng phương pháp tọa độ để giải bài toán hình học không gian.

1 ĐẶT VẤN ĐỀ

Hình học không gian là môn hình học khá trừu tượng nên đa số học sinh e ngại khi học về phần này. Trong các đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng gần đây, phần hình học không gian được ra dưới dạng mà học sinh có thể giải bằng hai phương pháp: Phương pháp hình học thuần túy và phương pháp tọa độ. Việc giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp hình học thuần túy gặp nhiều khó khăn đối với học sinh vừa học xong lớp 12 vì đa phần các em ít nhiều đã quen giải các bài toán tọa độ trong không gian.

Việc giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ có rất nhiều ưu việt, tuy nhiên học sinh cũng gặp không ít khó khăn. Bởi vì, phương pháp này chưa được đề cập nhiều trong các sách giáo khoa, học sinh phổ thông ít được tiếp cận, và phương pháp này chỉ tối ưu với một lớp bài toán nào đó chứ không phải lúc nào nó cũng tỏ ra hiệu quả.

Để các em học sinh lớp 12 có thêm phương pháp giải toán hình học không gian, chuẩn bị cho kì thi cuối cấp. Trong khuôn khổ bài báo, chúng tôi chủ yếu tập trung vào các vấn đề sau:

– Dấu hiệu nhận biết và các bước giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ.

– Đưa ra một số cách đặt hệ trục tọa độ với một số hình đặc biệt.

– Trình bày một số bài tập hình học không gian được giải theo phương pháp tọa độ và một số bài tập được giải theo hai phương pháp: Phương pháp tổng hợp và phương pháp tọa độ. Điều này giúp học sinh rèn luyện kĩ năng giải toán bằng tọa độ và có thể trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải sao cho phù hợp với từng bài toán.

2 NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1 Một số dấu hiệu nhận biết bài toán hình học không gian có thể giải bằng phương pháp tọa độ

– Hình đã cho có một đỉnh là tam diện vuông.

– Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy và đáy là các tam giác vuông, tam giác đều, hình vuông, hình chữ nhật,…

– Hình lập phương, hình hộp chữ nhật.

– Hình đã cho có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, trong mặt phẳng đó có những đa giác đặc biệt: Tam giác vuông, tam giác đều, hình thoi,…

– Một vài hình chưa có sẵn tam diện vuông nhưng có thể tạo được tam diện vuông chẳng hạn: Hai đường thẳng chéo nhau mà vuông góc, hoặc hai mặt phẳng vuông góc.

Ngoài ra, với một số bài toán mà giả thiết không cho những hình quen thuộc như đã nêu ở trên thì ta có thể dựa vào tính chất song song, vuông góc của các đoạn thẳng hay đường thẳng trong hình vẽ để thiết lập hệ trục tọa độ.

2.2 Các dạng toán thường gặp

– Tính độ dài đoạn thẳng, khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng.

– Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa hai đường thẳng, góc giữa hai mặt phẳng.

– Tính thể tích khối đa diện, diện tích thiết diện.

– Chứng minh quan hệ song song, vuông góc.

2.3 Các bước giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ

– **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp và tìm tọa độ các điểm có liên quan đến yêu cầu bài toán.

– **Bước 2:** Chuyển bài toán đã cho về bài toán hình học giải tích và giải.

– **Bước 3:** Giải bài toán hình học giải tích trên.

– **Bước 4:** Chuyển kết luận của bài toán hình học giải tích sang tính chất hình học tương ứng.

2.4 Thiết lập hệ trục tọa độ

Vấn đề quan trọng nhất trong việc giải bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ là thiết lập hệ tọa độ cho phù hợp. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một số phương pháp để thiết lập hệ tọa độ.

(1) Thiết lập hệ tọa độ đối với tam diện

Với góc tam diện việc tọa độ hóa thường được thực hiện khá đơn giản, đặc biệt với:

– Tam diện vuông thì hệ trục tọa độ vuông góc được thiết lập ngay trên tam diện đó.

– Tam diện có một góc phẳng vuông, khi đó ta thiết lập một mặt của hệ trục tọa độ chứa góc phẳng đó.

(2) Thiết lập hệ tọa độ cho hình chóp

Với hình chóp, việc tọa độ hóa thường được thực hiện dựa trên đặc tính hình học của chúng. Ta có các trường hợp thường gặp sau:

– Hình chóp đều thì hệ tọa độ được thiết lập dựa trên gốc O trùng với tâm của đáy và trục Oz trùng với đường cao của hình chóp.

– Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì ta thường chọn trục Oz là cạnh bên vuông góc với đáy, gốc tọa độ trùng với chân đường vuông góc.

– Trong các trường hợp khác ta dựa vào đường cao của hình chóp và tính chất đa giác đáy để chọn hệ tọa độ phù hợp.

(3) Thiết lập hệ trục tọa độ cho hình hộp chữ nhật

Với hình hộp chữ nhật thì việc thiết lập hệ tọa độ khá đơn giản, thường có hai cách:

– Chọn một đỉnh làm gốc tọa độ và ba trục trùng với ba cạnh của hình hộp chữ nhật.

– Chọn tâm của đáy làm gốc tọa độ và ba trục song song với ba cạnh của hình hộp chữ nhật.

(4) Thiết lập hệ tọa độ cho hình lăng trụ

– Với lăng trụ đứng thì ta chọn trục Oz thẳng đứng, gốc tọa độ là một đỉnh nào đó của đáy hoặc tâm của đáy hoặc điểm nằm trong mặt đáy là giao của hai đường thẳng vuông góc. Các trục Oy, Ox thì dựa vào tính chất của đa giác đáy mà chọn cho phù hợp.

– Với lăng trụ xiên, ta dựa trên đường cao và tính chất của đáy để chọn hệ tọa độ thích hợp.

Ngoài các trường hợp trên, trong các trường hợp khác ta dựa vào quan hệ song song, vuông góc và các tính chất của đường cao, đáy,... để thiết lập hệ tọa độ cho thích hợp.

2.5 Hệ trục tọa độ $Oxyz$

Hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian là hệ gồm ba trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ đôi một vuông góc.

- Điểm O là gốc tọa độ
- Ox gọi là trục hoành
- Oy gọi là trục tung
- Oz gọi là trục cao

Trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt chứa ba véctơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ đôi một vuông góc nhau.

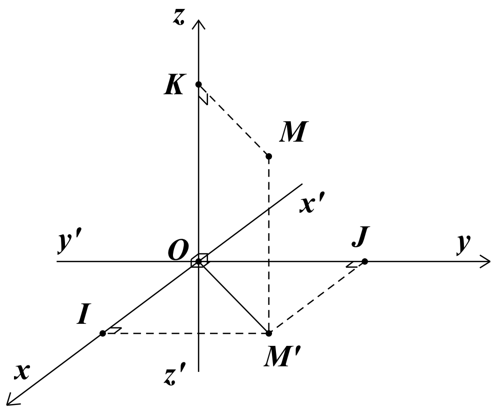
Tọa độ của véctơ: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Tọa độ của điểm: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow M(x; y; z)$

Cách xác định tọa độ điểm $M(x_M; y_M; Z_M)$ trong hệ tọa độ $Oxyz$

– Tìm hình chiếu M' của M trên mặt phẳng tọa độ Oxy

- Từ M' kẻ $M'I$ vuông góc với trục $x'Ox$ tại I
- Từ M' kẻ $M'J$ vuông góc với trục $y'Ox$ tại J
- Từ M kẻ MK vuông góc với trục $z'Oz$ tại K



– Nếu I, J, K lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz thì $\begin{cases} x_M = OI \\ y_M = OJ \\ z_M = OK = MM' \end{cases}$

– Nếu I, J, K lần lượt thuộc các tia Ox', Oy', Oz' thì $\begin{cases} x_M = -OI \\ y_M = -OJ \\ z_M = -OK = -MM' \end{cases}$

2.6 Một số bài toán

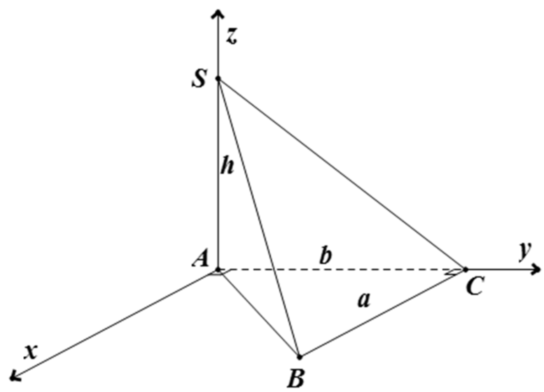
<u>**Bài toán 1**</u>**:** *(SGK Hình học NC lớp 12).* Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = h$, đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AC = b$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc SB.

Giải

Kẻ $Ax \parallel BC$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $A \equiv O, C \in Oy, S \in Oz$.



Ta có: $A(0; 0; 0), S(0; 0; h)$,

$C(0; b; 0), B(a; b; 0), M(0; \frac{b}{2}; 0)$

$\overrightarrow{SN} = (x_N; y_N; z_N), \overrightarrow{SB} = (a; b; -h)$

$$\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \frac{a}{3} \\ y_N = \frac{b}{3} \\ z_N = \frac{2h}{3} \end{cases} \Rightarrow N(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{2h}{3})$$

a) Ta có: $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{36} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{4a^2 + b^2 + 16h^2}$

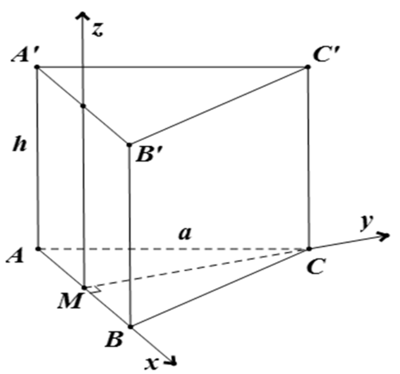
b) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{3}; \frac{-b}{6}; \frac{2h}{9}\right), \overrightarrow{SB} = (a; b; -h)$

$$MN \perp SB \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{6} - \frac{2h^2}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2a^2 - b^2 - 4h^2 = 0$$

Vậy $MN \perp SB$ khi $2a^2 - b^2 - 4h^2 = 0$.

Bài toán 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a, AA' = h$ và vuông góc với (ABC). Biết rằng khoảng cách giữa $A'B'$ và BC' bằng d. Chứng minh rằng $a = \frac{2dh}{\sqrt{3(h^2-d^2)}}$.

Giải



Gọi M là trung điểm AB. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $M \equiv O, B \in Ox, C \in Oy$. Ta có:

$$A'\left(\frac{-a}{2}; 0; h\right), B'\left(\frac{a}{2}; 0; h\right),$$
$$B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), C'(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h)$$

$\overrightarrow{A'B'} = (a; 0; 0), \overrightarrow{A'B} = (a; 0; -h)$

$\overrightarrow{BC'} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right), \left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BC'}\right] = (0; -ah; \frac{a^2\sqrt{3}}{2})$

$$d = d(A'B', BC') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BC'}\right].\overrightarrow{A'B}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BC'}\right]\right|} = \frac{\left|\frac{-ha^2\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{a^2h^2 + \frac{3a^4}{4}}} = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$$

$d\sqrt{4h^2 + 3a^2} = ah\sqrt{3} \Leftrightarrow d^2(4h^2 + 3a^2) = 3a^2h^2 \Leftrightarrow a = \frac{2dh}{\sqrt{3(h^2-d^2)}}$ (đpcm).

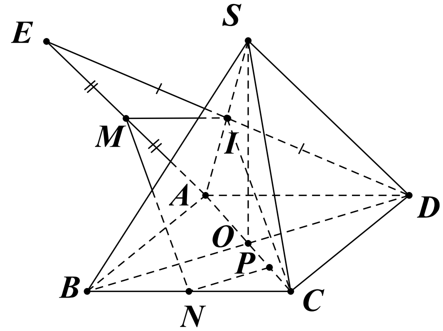
Bài toán 1 nếu giải theo phương pháp hình học thuần túy thì gặp trở ngại ở câu b. Việc tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau của bài toán 2 gặp nhiều khó khăn đối với một số học sinh chưa nắm vững phương pháp tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Lời giải bằng phương pháp tọa độ cũng ngắn gọn và khá đơn giản.

Bài toán 3: *(ĐH khối B 2007).* Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA, M là trung điểm AE, N là trung điểm BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Giải

Phương pháp tổng hợp	**Phương pháp tọa độ**

Phương pháp tổng hợp



Ta có: $\begin{cases} MI \parallel \\ MI = \end{cases}$

Suy ra tứ giác $MICN$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN \parallel IC$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp IC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MN \perp BD$ (đpcm)

$\begin{cases} MN \parallel IC \\ IC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SAC), AC \subset (SAC)$

$\Rightarrow d(MN, AC) = d\big(MN, (SAC)\big)$

$= d(N, (SAC))$

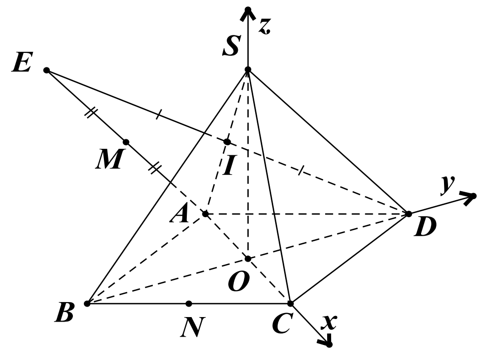
Gọi P là trung điểm OC. Ta có:

$\begin{cases} NP \perp AC \\ NP \perp SO \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SAC)$

$\Rightarrow d\big(N, (SAC)\big) = NP = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Vậy $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Phương pháp tọa độ



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $C \in Ox, D \in Oy, S \in Oz$. Ta có:

$O(0;0;0), A\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0)$

$C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;h), h > 0$

Gọi I là trung điểm SA. Ta có:

$I\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4};0;\frac{h}{2}\right), E\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{-a\sqrt{2}}{2};h\right),$

$M\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right), N(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{-a\sqrt{2}}{4};0)$

$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2};0;\frac{-h}{2}\right), \overrightarrow{BD} = (0;a\sqrt{2};0)$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.0 + 0.a\sqrt{2} - \frac{h}{2}.0 = 0$

$\Rightarrow MN \perp BD$

$\overrightarrow{AC} = \left(a\sqrt{2};0;0\right), \overrightarrow{MA} = (0;\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{-h}{2})$

$\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right] = (0;\dfrac{-ah\sqrt{2}}{2};0)$

$\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{MA} = (0;\dfrac{-a^2h}{4};0)$

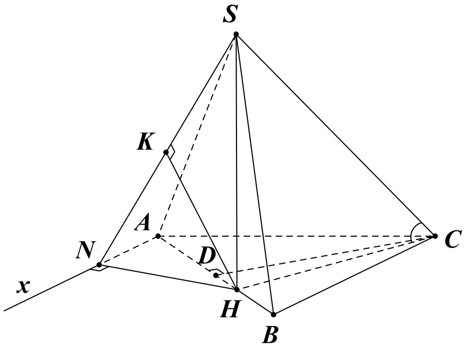
$d(MN, AC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{\left|\frac{-a^2h}{4}\right|}{\sqrt{\frac{a^2h^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$

Lời giải của bài toán bằng phương pháp tổng hợp ta thấy nó cũng ngắn gọn và dễ hiểu, nhưng khi đọc đề để tìm đáp án thì rất khó phát hiện được tứ giác MICN là hình bình hành, đây là mấu chốt chính để tìm ra lời giải. Việc chứng minh và tính khoảng theo phương pháp tọa độ rất dễ dàng nếu việc tìm ra tọa độ các điểm chính xác, nhìn có vẽ dài dòng nhưng phương pháp này không đòi hỏi học sinh phải tư duy cao. Do đó, phương pháp tọa độ phù hợp với đối tượng học sinh không có kỹ năng giải toán hình học không gian theo phương pháp hình học thuần túy.

Bài toán 4: (*ĐH khối A năm 2012*). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Giải

Phương pháp tổng hợp



HC là hình chiếu của SC lên (ABC)

$\Longrightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCH} = 60^0$

Gọi D là trung điểm cạnh AB. Ta có: $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HD = \frac{AB}{2} - \frac{AB}{3} = \frac{a}{6}$

Xét ΔHDC vuông tại H, ta có:

$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$

Xét ΔSHC vuông tại H, ta có:

$SH = HC.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$ (đvtt)

Kẻ $Ax \parallel BC$, kẻ $HN \parallel Ax, N \in Ax$

Ta có: $BC \parallel (SAN)$ nên $d(SA, BC) = d\big(BC, (SAN)\big) = d(B, (SAN))$

Vì $HB \cap (SAN) = A$ nên ta có: $\frac{d(B,(SAN))}{d(H,(SAN))} = \frac{AB}{AH} = \frac{AB}{AD+DH} = \frac{AB}{\frac{AB}{2}+\frac{AB}{6}} = \frac{3}{2}$ (*)

Ta có: $\begin{cases} AN \perp SH \\ AN \perp HN \end{cases} \Longrightarrow AN \perp (SHN)$

$\Longrightarrow (SAN) \perp (SHN)$

Mặt khác: $(SAN) \cap (SHN) = SN$

Từ H kẻ $HK \perp SN$ $(K \in SN)$. Khi đó: $HK \perp (SAN)$ hay $d\big(H, (SAN)\big) = HK$

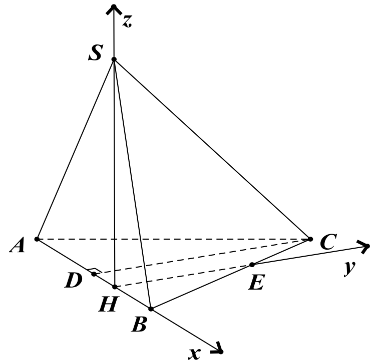
$AH = \frac{2a}{3}; HN = AH.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét ΔSHN vuông tại H, ta có: $HK.SN = NH.SH \Longrightarrow HK = \frac{NH.SH}{\sqrt{SH^2+HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$

(*)$\Longrightarrow d\big(B, (SAN)\big) = \frac{3}{2}d\big(H, (SAN)\big) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$

Vậy $d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Phương pháp tọa độ



Gọi D là trung điểm AB; kẻ $HE \parallel DC, E \in BC$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $H \equiv O, B \in Ox, E \in Oy, S \in Oz$. Ta có:

$H(0;0;0), A\left(\frac{-2a}{3};0;0\right), B\left(\frac{a}{3};0;0\right)$,

$C(\frac{-a}{6};\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $S(0;0,z)$ với $z > 0$,

$\overrightarrow{SC} = \left(\frac{-a}{6};\frac{a\sqrt{3}}{2};-z\right), \vec{k} = (0;0;1)$. Góc giữa SC và (ABC) bằng 60^0 nên ta có:

$\sin 60^0 = \frac{|\overrightarrow{SC}.\vec{k}|}{|\overrightarrow{SC}|.|\vec{k}|} = \frac{|-z|}{\sqrt{\frac{7}{9}a^2+z^2}}$

$\Leftrightarrow z^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{9}a^2 + z^2\right) \Longrightarrow z = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

$\Longrightarrow S(0;0;\frac{a\sqrt{21}}{3})$. Ta có:

$\overrightarrow{SA} = \left(\frac{-2a}{3};0;\frac{-a\sqrt{21}}{3}\right), \overrightarrow{SB} = (\frac{a}{3};0;\frac{-a\sqrt{21}}{3})$

$\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right] = \left(0;\frac{-a^2\sqrt{21}}{3};0\right)$

$\overrightarrow{SC} = (\frac{-a}{6};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{-a\sqrt{21}}{3})$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right| = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$ (đvtt)

$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \overrightarrow{AB} = (a;0;0)$

$\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\frac{-a^2\sqrt{7}}{2};\frac{-a^2\sqrt{21}}{6};\frac{-a^2\sqrt{3}}{3}\right)$

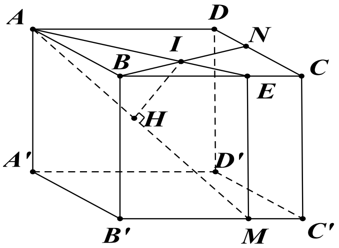
$d(SA, BC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|} = \frac{\left|\frac{-\sqrt{7}a^3}{2}\right|}{\sqrt{a^4\left(\frac{7}{4}+\frac{7}{12}+\frac{1}{3}\right)}} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$

Lời giải bài toán trên cũng chứng minh được ưu điểm của phương pháp tọa độ.

Bài toán 5: *(Giải toán Hình học 11, NXB Giáo Dục).* Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh $B'C'$ và CD sao $B'M = \frac{2}{3}B'C', CN = \frac{2}{3}CD$. Chứng minh $AM \perp BN$ và tính khoảng cách giữa AM và BN.

Giải

Phương pháp tổng hợp



Kẻ $ME \parallel CC', (E \in BC); I = BN \cap AE.$

$\Delta ABE = \Delta BCN\ (c.c.c) \Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{AEB}$

$\Rightarrow$Tứ giác $INCE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NIE} = 90^0$

Hay $BN \perp AE$ (1). Mặt khác:

$\begin{cases} CC' \perp (ABCD) \\ ME \parallel CC' \end{cases} \Rightarrow ME \parallel (ABCD)$

$\Rightarrow ME \perp BN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BN \perp (AME) \Rightarrow BN \perp AM$

Ta có: $\begin{cases} AM \subset (AME) \\ (AME) \perp BN, (I \in BN) \end{cases}$

Trong (AME), từ I kẻ $IH \perp AM, H \in AM$

Suy ra: $d(AM, BN) = IH$

Xét ΔABE vuông tại E, ta có:

$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \frac{\sqrt{13}a}{3}; AB^2 = AI.AE$

$\Rightarrow AI = \frac{3a^2}{\sqrt{13}a} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

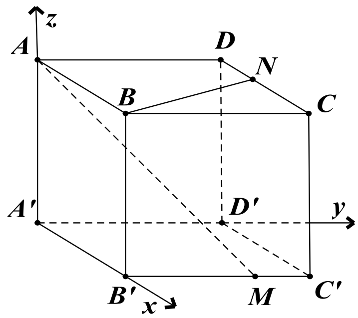
Xét ΔAME vuông tại E, ta có:

$AM = \sqrt{AE^2 + ME^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{9} + a^2} = \frac{\sqrt{22}a}{3}$

$\Delta AIH \backsim \Delta AME (g.g) \Rightarrow \frac{IH}{ME} = \frac{AI}{AM}$

$\Rightarrow IH = \frac{ME.AM}{AI} = \frac{9a}{\sqrt{286}}.$

Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $A \equiv O, B' \in Ox, D' \in Oy, A \in Oz$. Ta có:

$A(0;0;0), M\left(a; \frac{2a}{3}; 0\right), B(a;0;a),$

$N(\frac{a}{3}; a; a)$

$\overrightarrow{AM} = \left(a; \frac{2a}{3}; -a\right), \overrightarrow{BN} = (\frac{-2a}{3}; a; 0)$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} = \frac{-2a^2}{3} + \frac{-2a^2}{3} = 0$

$\Rightarrow AM \perp BN$

$\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0),$

$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}\right] = (a^2; \frac{2a^2}{3}; \frac{13a^2}{9})$

$d(AM, BN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}\right]\right|} = \frac{|a^3|}{\sqrt{\frac{286}{81}a^4}} = \frac{9a}{\sqrt{286}}.$

Đối với hình lập phương thì việc giải bài toán bằng phương pháp tọa độ có nhiều thuận lợi nhất. Việc chọn hệ trục tọa độ và tìm tọa độ các điểm cũng đơn giản. Do đó, lời giải bằng phương pháp này ngắn gọn hơn. Để giải được bài toán này bằng phương pháp tổng hợp thì đòi hỏi học sinh nắm vững kiến thức của hình học phẳng và hình học không gian.

Ưu điểm của phương pháp tọa độ

Phương pháp tọa độ giúp giải một số bài toán hình học không gian đơn giản hơn khi giải bằng phương pháp hình học thuần túy.

Lượng kiến thức và kĩ năng để giúp học sinh có thể giải các bài toán hình học thông qua phương pháp này không nhiều chủ yếu là các kiến thức về tọa độ véctơ trong không gian, phương trình đường thẳng, mặt phẳng, mối quan hệ giữa chúng.

Phương pháp này không quá khó nên đối với các em học sinh trung bình yếu việc sử dụng phương pháp này đơn giản hơn nhiều so với phương pháp tổng hợp, chủ yếu là dạy các em cách đặt hệ trục tọa độ sao cho phù hợp.

Nhược điểm của phương pháp tọa độ

Không phải tất cả các bài toán về hình học không gian đều có thể sử dụng phương pháp tọa độ để giải, chỉ với những hình đặc biệt có những cạnh có quan hệ vuông góc với nhau thì ta mới nên sử dụng phương pháp này vì nếu không việc tính tọa độ các điểm rất khó khăn.

Sử dụng phương pháp này đòi hỏi phải có kĩ năng tính toán khá tốt và phải nhớ được các công thức về phương trình của đường thẳng, mặt phẳng, các công thức về tính góc và khoảng cách. Một số công thức khá giống nhau nên đôi khi dễ gây nên sự nhầm lẫn.

3 THỰC NGHIỆM

3.1 Mục đích thực nghiệm

Thực nghiệm nhằm kiểm tra tính khả thi và hiệu quả của phương pháp tọa độ hóa qua dạy học giải bài tập hình học không gian bằng phương pháp tọa độ, kết hợp điều tra và phỏng vấn.

3.2 Nội dung và phương pháp thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành tại lớp 12A, trường Trung học Phổ thông Hòa Bình. Lớp 12A gồm 40 học sinh có kết quả học tập tương đối đồng đều do thầy Trần Nguyễn Khái Hưng giảng dạy môn toán. Thầy Hưng đã có trên 7 năm kinh nghiệm giảng dạy môn toán lớp 12. Trước kia, khi dạy học giải các bài tập về tọa độ trong không gian thầy Hưng ít giới thiệu các bài tập hình học không gian có thể giải bằng phương pháp tọa độ. Do đó, học sinh không được rèn luyện phương pháp tọa độ hóa và cảm thấy e ngại trong kỳ thi tốt nghiệp và đại học vì cả hai kỳ thi đều có câu bài tập hình học không gian mà giải theo phương pháp tổng hợp thì các em không mấy tự tin bởi có một số bài tập trong thời gian ngắn không thể tìm được lời giải.

Quá trình thực nghiệm được tiến hành trong các tiết giải bài tập và dạy học một số bài tập hình học không gian theo phương pháp tọa độ và các tiết dạy này được phân bố sau khi học các bài phương pháp tọa độ trong không gian. Trước khi thực nghiệm, chúng tôi cùng với thầy Hưng đã cùng nhau trao đổi phương pháp dạy học sinh cách chọn hệ trục tọa độ không gian sao cho phù hợp và dễ dàng tìm được tọa độ các điểm trong bài toán.

Bên cạnh đó, chúng tôi trao đổi xin ý kiến của một số giáo viên, phỏng 20 học sinh đang học lớp 12 và 9 học sinh vừa học xong lớp 12.

Các câu hỏi phỏng vấn

– Sau khi học xong chương 4 của chương trình hình học lớp 12 thì em giải các bài tập hình học không gian bằng phương pháp thuần túy hay phương pháp tọa độ?

– Phương pháp tọa độ hóa dễ tiếp thu hay không?

– Sau khi được trang bị thêm phương pháp tọa độ hóa thì em có an tâm hơn khi làm câu hình học không gian trong kì thi đại học không?

3.3 Phân tích kết quả thực nghiệm

Sau khi tiến hành thực nghiệm, qua kết quả bài kiểm tra chứng minh được rằng các em học sinh trung bình khá có thể tiếp thu được phương pháp này dễ dàng và cùng một bài tập hình học không gian thì số lượng học sinh giải được bằng phương pháp tọa độ nhiều hơn số học sinh giải bằng phương pháp tổng hợp.

Qua trao đổi với một số giáo viên có nhiều năm kinh nghiệm dạy lớp 12 thì các giáo viên cùng nhận định rằng vận dụng phương pháp tọa độ để giải các bài tập hình học không gian có nhiều thuận lợi. Ý kiến của các em đang học lớp 12 thì nhận xét rằng phương pháp này dễ hiểu hơn phương pháp tổng hợp và có thể tiếp thu dễ dàng, còn các em vừa học xong lớp 12 thì cho rằng phương pháp tọa độ hóa rất hay, các em cảm thấy tự tin hơn khi bước vào kỳ thi Đại học.

Muốn quá trình này đạt hiệu quả, cần phối hợp dạy học bằng phương pháp tọa độ để học sinh có nhiều cơ hội giải được các bài tập hình học không gian. Phương pháp này không những giúp học sinh ôn lại kiến thức tọa độ trong không gian của chương 4 trong chương trình Hình học lớp 12 mà nó còn là công cụ đắc lực để hỗ trợ các em trong các kỳ thi, đặc biệt là kỳ thi tuyển sinh Đại học. Điều đó đã chứng tỏ ưu điểm nổi bật của phương pháp tọa độ.

4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi tập trung vào việc đưa hệ trục tọa độ để giải các bài toán hình học không gian. Đây là phần quan trọng nhất để giải thành công một bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ. Các ví dụ trên đây cùng với kết quả thực nghiệm sư phạm ở trường phổ thông đã khẳng định các ưu điểm, tính khả thi và hiệu quả của phương pháp tọa độ hóa trong dạy học toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đoàn Quỳnh tổng chủ biên, Văn Như Cương chủ biên, Phạm Khắc Ban, Lê Huy Hùng, Tạ Mân (2010), *Hình học 12 nâng cao*, Nxb Giáo dục.
2. Văn Như Cương (chủ biên), Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2007), *Bài tập hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.
3. Trương Ngọc Dũng (2008), *Giải toán hình học lớp 11*, NXB Giáo Dục.
4. Võ Thanh Văn (chủ biên), TS. Lê Hiển Dương, Nguyễn Ngọc Giang (2010), *Chuyên đề ứng dụng tọa độ trong giải toán hình học không gian*, NXB Đại học sư phạm, Hồ Chí Minh.
5. Lê Hồng Đức, Nguyễn Đức Trí (2007), *Phương pháp giải toán hình học giải tích trong không gian*, Nxb Hà Nội.