Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2017.148

VỀ M-CƠ SỞ MẠNH TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Trần Văn Sự
Khoa Toán, Trường Đại học Quảng Nam

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 22/05/2017
Ngày nhận bài sửa: 01/08/2017
Ngày duyệt đăng: 29/11/2017

Title:
On strong M-bases in Banach spaces

Từ khóa:
Độc lập tuyến tính, Không gian Banach, - cơ sở mạnh, Tính ổn định, Tính liên tục

Keywords:
Linear independent, Banach spaces, On strong - bases, Stability, Continuity

ABSTRACT

The aim of this paper is to study necessary and sufficient conditions such that a given system will become a strong M-base in Banach Spaces. The results obtained in this article were based on the stability of strong M-bases in Hilbert Spaces. Firstly, for two strong M-bases given, there would exists a continuous linear operator, which is denoted by T, such that $I_E - T$ is a continuous linear injective. Under the suitable assumptions, $I_E - T$ will become a continuous linear isomorphism. Secondly, a sufficient condition on the existences of a strong M-base in given Banach space is also provided as well. Finally, a conclusion to the obtained results is also proposed.

TÓM TẮT

Bài báo này nhằm mục đích nghiên cứu một số điều kiện cần và đủ sao cho một hệ thống cho trước trở thành một M-cơ sở mạnh trong không gian Banach. Các kết quả thu được trong bài báo dựa trên tính ổn định của M-cơ sở mạnh trong không gian Hilbert. Trước tiên, với hai dãy M-cơ sở mạnh cho trước, luôn tồn tại một toán tử tuyến tính liên tục T sao cho $I_E - T$ là một đơn cấu tuyến tính liên tục. Dưới các giả thiết phù hợp, $I_E - T$ sẽ trở thành một đẳng cấu tuyến tính. Tiếp theo, một điều kiện đủ về sự tồn tại của một M-cơ sở mạnh trong không gian Banach cho trước cũng được dẫn tốt. Cuối cùng, một sự kết luận cho các kết quả thu được cũng được đề xuất.

Trích dẫn: Trần Văn Sự, 2017. Về M-cơ sở mạnh trong không gian Banach. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 53a: 118-124.

1 GIỚI THIỆU

Trong không gian Banach có nhiều loại cơ sở khác nhau, chẳng hạn như cơ sở Cesaro, cơ sở Markusěvic (hay M-cơ sở), cơ sở Schäuder, … Để nghiên cứu tính ổn định của các loại cơ sở này trong không gian Banach, Paley, Wiener và Bary (Paley *et al.*, 1934) đã đề xuất bài toán sau:

Bài toán 1: *Với điều kiện nào của một dãy cho trước đủ "gần" với một cơ sở Schäuder cho trước cũng là một cơ sở Schäuder trong không gian Banach?*

Ta có thể mô tả lại bài toán trên như sau: với điều kiện nào của dãy $\{y_n\}_{n=1,2,\dots,+\infty}$ đủ gần dãy $\{e_n\}_{n=1,2,\dots,+\infty}$ thì nó cũng là một cơ sở Schäuder của không gian Banach E?

Bài toán này được quan tâm nghiên cứu nhiều bởi nhiều nhà toán học (Singer, 1970; Retherford *et al.*, 1971; Singer, 1981; Sinha, 2000; Kasimov, 2002). Nhiều điều kiện ổn định trong trường hợp cơ sở Schäuder đưa ra hầu hết đều độc lập, tức là từ điều kiện này không thể sinh ra điều kiện khác

(Singer, 1970), và được chỉ ra bằng nhiều ví dụ cụ thể trong giải tích hàm. Được biết rằng, mỗi cơ sở Schäuder là một M-cơ sở mạnh (Singer, 1970; Singer, 1981). Điều này cho biết M-cơ sở mạnh là mạnh hơn cơ sở Schäuder. Do đó, các kết quả có trong cơ sở Schäuder không thể áp dụng trực tiếp cho M-cơ sở mạnh được. Vì vậy, việc nghiên cứu các tính chất liên quan đến sự ổn định của M-cơ sở mạnh là một việc làm có ý nghĩa và cần thiết đối với bài báo này.

Trong bài báo, không gian Banach xác định trong trường số phức $\mathbb{C}$ luôn được ký hiệu bằng một ký tự E, tập chỉ số tùy ý được ký hiệu bằng ký tự I.

Mục đích chính của bài báo là nghiên cứu tính ổn định cho **Bài toán 1** trên dựa vào một cơ sở tổng quát hơn đó là M-cơ sở hay cơ sở Markusĕvic.

Phương pháp nghiên cứu chính trong bài báo này là sử dụng công cụ của giải tích hàm như công thức tính chuẩn, ánh xạ ngược, tính chất đẳng cấu của toán tử $I_E - A : E \to E$ với $I_E : E \to E$ là toán tử đồng nhất và A là toán tử tuyến tính có chuẩn bé hơn 1.

2 CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ

Cho E là một không gian Banach tùy ý, E^* là một không gian đối ngẫu tôpô của E và cho một họ $\{e_i\}_{i\in I} \subset E,$ với I là một tập chỉ số tùy ý. Các định nghĩa dưới đây là cơ sở để nghiên cứu tính chất ổn định của M-cơ sở mạnh trong không gian Banach và hơn nữa, có thể tìm thấy trong các tài liệu (Singer, 1970; Retherford *et al.*, 1971; Singer, 1981; Sinha, 2000; Kasimov, 2002).

2.1 Định nghĩa

(i) Hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là song trực giao nếu $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ với mọi $i,\ j \in I$ trong đó δ_{ij} là Krockener delta. Hệ song trực giao $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là cực đại nếu nó không có mở rộng thực sự nào, theo nghĩa, nếu $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ không cực đại thì tồn tại $e_0 \in X,\ e_0 \neq e_i,\ \forall i \in I,\ f_0 \in X^*,$ $f_0 \neq f_i\ (\forall i \in I)$ sao cho hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I} \cup \{e_0, f_0\}$ là song trực giao.

(ii) Hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là E-đầy đủ (hay gọi tắt là đầy đủ) nếu không gian con sinh bởi $\{e_i : i \in I\}$ là trù mật trong E, nghĩa là $\overline{span\{e_i : i \in I\}} = E.$

(iii) Hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là E^*-toàn vẹn (hay gọi tắt là toàn vẹn), nếu $e \in E,\ f_i(e) = 0,\ \forall i \in I \Rightarrow e = 0.$

Định nghĩa 2.1 là cơ sở cho các định nghĩa dưới đây và sẽ được phát biểu như sau:

2.2 Định nghĩa

(i) Họ $\{e_i\}_{i\in I}$ gọi là M-cơ sở (hay cơ sở Markusĕvic) của E nếu tồn tại $\{f_i\}_{i\subset I} \subset E^*$ sao cho hệ $\{e_i,\ f_i\}_{i\in I}$ là song trực giao đầy đủ và toàn vẹn.

(ii) Nếu họ $\{f_i\}_{i\in I} \subset E^*$ tồn tại và duy nhất thì nó được gọi là họ hàm liên kết qua M- cơ sở $\{e_i\}_{i\in I}$.

(iii) Một M-cơ sở $\{e_i\}_{i\in I}$ với họ hàm liên kết $\{f_i\}_{i\in I}$ được gọi là M-cơ sở mạnh khi mỗi $x \in E$ thì $x = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i.$

2.3 Ví dụ

Xét không gian Hilbert $E = l_2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$ với tích vô hướng sau:

$$< x,\ y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad \forall x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E.$$

Xét họ $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq E$ được xác định bởi

$$e_i(j) = \begin{cases} 1,\ khi\ i = j \\ 0,\ khi\ i \neq j \end{cases}.$$

Với mọi $i \in \mathbb{N},$ xét hàm $f_i : E \to \mathbb{C}$ được định nghĩa bởi:

$$f_i(x) =< x,\ e_i > \quad \forall x \in E.$$

Dễ thấy $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ và với mỗi $x \in E$, ta có biểu diễn sau:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} < x,\, e_i > e_i.$$

Do đó, $\overline{span\{e_i :\ i \in \mathbb{N}\}} = E$.

Vậy hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là $E-$đầy đủ. Xét $f_i(x) = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$. Theo định nghĩa ta có

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} < x,\, e_i > e_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)e_i = \sum_{i=1}^{\infty} 0.e_i = 0.$$

Do vậy, hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là E^*-toàn vẹn. Theo định nghĩa $M-$cơ sở mạnh, hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là $M-$cơ sở mạnh của l_2.

2.4 Định nghĩa

Dãy $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ $(e_i \neq 0,\ \forall\, i \in \mathbb{N})$ được gọi là một cơ sở Schäuder của E nếu với mỗi $x \in E$, tồn tại duy nhất các vô hướng $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sao cho $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$.

Xét một họ liên kết $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ với cơ sở Schäuder $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ của E trong đó $f_i(x) = x_i\ \ \forall x \in E$. Khi đó, hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là $M-$cơ sở mạnh.

3 CÁC KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Dựa vào tính chất đủ "*gần*" được đưa ra theo nhiều hướng khác nhau trong phát biểu của **Bài toán 1**, các kết quả về điều kiện cần và đủ cho M -cơ sở mạnh trong không gian Banach phức E sẽ được cung cấp. Đầu tiên là một điều kiện cần có thể được phát biểu như sau:

3.1 Định lí

Cho I là tập chỉ số tùy ý và giả sử rằng $\{e_i,\, f_i\}_{i\in I}$ và $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là hai M -cơ sở mạnh trong không gian Banach E và ngoài ra, tồn tại ít nhất một chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục. Giả sử thêm rằng chuỗi số $\sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \|$ hội tụ. Khi đó, tồn tại duy nhất một toán tử $T : E \to E$ tuyến tính, liên tục và thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\| T \| \le \sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \|. \qquad (*)$$

Nếu thêm $\{y_i\}_{i\in I}$ là một hệ độc lập tuyến tính mở rộng thì toán tử $I_E - T$ là một đơn cấu tuyến tính liên tục.

Ở đây $\{y_i\}_{i\in I}$ là một hệ độc lập tuyến tính mở rộng, nghĩa là:

$$\sum_{i\in I} a_i y_i = 0,\ \ a_i \in K\,(K = \mathbb{R},\, \mathbb{C})$$
$$\Rightarrow\ \ a_i = 0\ \ \forall i \in I.$$

Chứng minh: Theo giả thiết, tồn tại chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục. Xét toán tử T từ E vào E được xác định bởi $T = I_E - g_{i_0}^{-1} \circ f_{i_0}$ với $I_E : E \to E$ là toán tử đồng nhất. Với mọi $x \in E$, theo định nghĩa M -cơ sở mạnh ta có

$$x = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i.$$

Suy ra

$$T x = x - g_{i_0}^{-1}(f_{i_0}(x)).$$

Mà

$$f_{i_0}(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)\delta_{ii_0} = \sum_{i\in I} f_i(x) g_{i_0}(y_i)$$
$$= g_{i_0}\left(\sum_{i\in I} f_i(x) y_i\right).$$

Do đó,

$$g_{i_0}^{-1} \circ f_{i_0}(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)\, y_i.$$

Hệ quả là

$$Tx = \sum_{i\in I} f_i(x)(e_i - y_i),\ \ \forall x \in E.$$

Vậy, toán tử T xác định như trên là duy nhất. Ta chứng minh T tuyến tính. Thật vậy, với mọi $x, y \in E,\ \alpha, \beta \in K$, do $f_i \in E^*\ \ \forall i \in I$ nên

$$f_i\left(\alpha x+\beta y\right)=\alpha f_i(x)+\beta f_i(y)\quad \forall i\in I.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}T\left(\alpha x+\beta y\right)&=\sum_{i\in I}\left[\alpha f_i(x)+\beta f_i(y)\right](e_i-y_i)\\&=\sum_{i\in I}\alpha f_i(x)(e_i-y_i)+\sum_{i\in I}\beta f_i(y)(e_i-y_i)\\&=\alpha\sum_{i\in I}f_i(x)(e_i-y_i)+\beta\sum_{i\in I}f_i(y)(e_i-y_i)\\&=\alpha Tx+\beta Ty.\end{aligned}$$

Ngoài ra, T liên tục bởi vì các ánh xạ $g_{i_0}^{-1}$, f_{i_0} liên tục nên ánh xạ $I_E-g_{i_0}^{-1}\,o\,f_{i_0}:E\to E$ cũng liên tục, và điều này kéo theo T cũng vậy.

Mặt khác, ta có bất đẳng thức $\|Tx\|\le\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|\|x\|$ với mọi $x\in E.$ Từ đây dễ dàng có được kết quả (*) trong phát biểu của Định lí 3.1.

Cuối cùng, hiển nhiên rằng I_E-T là một toán tử tuyến tính và liên tục. Ta còn phải chứng minh rằng nó là một đơn ánh là đủ.

Thật vậy, với mỗi phần tử $x\in E$ thoả mãn

$$(I_E-T)x=0,$$

hay tương đương với

$$\sum_{i\in I}f_i(x)y_i=0.$$

Vì họ $\{y_i\}_{i\in I}$ độc lập tuyến tính mở rộng nên suy ra $f_i(x)=0,\ \forall i\in I.$ Lại vì họ $\{x_i,\ f_i\}_{i\in I}$ toàn vẹn nên suy ra $x=0.$ Từ đây suy ra $(I_E-T)^{-1}(0)=\{0\}$. Áp dụng một kết quả được biết trong giáo trình Giải tích hàm (Nguyễn Văn Khuê *và ctv.*, 2001), ta suy ra rằng toán tử I_E-T là một đơn cấu tuyến tính và điều này kết thúc chứng minh

Chú ý từ điều kiện $(I_E-T)^{-1}(0)=\{0\}$, suy ra $I_E-T:E\to E$ là đơn ánh. Thật vậy, giả sử

$$\left(I_E-T\right)(x)=\left(I_E-T\right)(y).$$

Vì I_E-T là toán tử tuyến tính nên

$$\begin{aligned}&\left(I_E-T\right)(x)-\left(I_E-T\right)(y)=0\\&\Leftrightarrow\left(I_E-T\right)(x-y)=0\\&\Leftrightarrow x-y\in\left(I_E-T\right)^{-1}(0)\\&\Leftrightarrow x-y\in\{0\}\\&\Leftrightarrow x=y.\end{aligned}$$

Thêm một điều kiện cần về tính ổn định của M-cơ sở có thể được suy ra trực tiếp từ Định lí 3.1 bên trên được phát biểu như sau:

3.2 Định lí

Cho I là tập chỉ số tùy ý và giả sử rằng $\{e_i,\ f_i\}_{i\in I}$ và $\{y_i,\ g_i\}_{i\in I}$ là hai M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E. Khi đó, nếu $\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|<1$ và có ít nhất một chỉ số $i_0\in I$ sao cho $g_{i_0}^{-1}$ liên tục, thì có thể xác định duy nhất một toán tử $T:E\to E$ có tính chất tuyến tính, liên tục và I_E-T là một đẳng cấu từ E vào E.

Chứng minh: Áp dụng Định lý 2.1, toán tử tuyến tính $T:E\to E$ tồn tại và duy nhất. Theo giả thiết ta có

$$\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|<1$$

và kết quả thu được bởi công thức (*) trong Định lí 3.1. Suy ra

$$\|T\|<1.$$

Do đó, toán tử I_E-T là một đẳng cấu từ E vào E và điều này kết thúc chứng minh.

Cuối cùng là một điều kiện đủ dựa trên cơ sở là các điều kiện cần và có thể được phát biểu như sau:

3.3 Định lí

Cho I là tập chỉ số tùy ý và giả sử rằng hệ $\{e_i,\ f_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh của E. Cho $\{y_i\}_{i\in I}$ là một họ trong E. Giả sử thêm rằng:

(i) Tồn tại một chỉ số $i_0\in I$ sao cho $f_{i_0}^{-1}$ liên tục.

(ii) $\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|<1.$

Khi đó tồn tại một họ $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq E^*$ và một chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục và hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh trong không gian Banach phức E.

Chứng minh: Theo chứng minh của Định lí 3.1 trên, xét một toán tử T từ E vào E được xác định bởi công thức sau:

$$Tx = \sum_{i\in I} f_i(x)(e_i - y_i) \ \forall x \in E.$$

Áp dụng một tính chất quen thuộc trong giáo trình Giải tích hàm: với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $L \in E^*$, $x \in E$ ta luôn có:

$$\|L(x)\| \le \|L\|\,\|x\|,$$

Từ đây ta suy ra được rằng

$$\|Tx\| \le \left(\sum_{i\in I} \|f_i\|\|e_i - y_i\|\right)\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Do đó,

$$\|Tx\| < \|x\| \ \forall x \in E,\ x \ne 0,$$

bởi vì

$$\sum_{i\in I} \| f_i \|\|\, e_i - y_i \| < 1 \quad \text{(xem giả thiết (ii))}.$$

Hệ quả là

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\ne 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < 1.$$

Theo chứng minh của Định lí 3.2, toán tử $I_E - T$ là một đẳng cấu tuyến tính từ E vào E. Tiếp theo ta xét dãy hàm $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq E^*$ với $g_i = (f_i)_o\,(I_E - T)^{-1}$. Từ giả thiết (i) trên suy ra rằng tồn tại chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $f_{i_0}^{-1}$ liên tục. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}(g_{i_0})^{-1} &= \left((f_{i_0})_o\,(I_E - T)^{-1}\right)^{-1}\\ &= \left((I_E - T)^{-1}\right)^{-1}_o\,(f_{i_0})^{-1}\\ &= (I_E - T)_o\,(f_{i_0})^{-1}.\end{aligned}$$

Vậy ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục từ E vào E. Cuối cùng, chứng minh hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E. Dễ thấy rằng

$$(I_E - T)(e_j) = y_j \ \ \forall j \in I.$$

$$\forall i, j \in I,\ \ g_i(y_j) = f_i(e_j) = \begin{cases}1, & khi\ \ i = j\\ 0, & khi\ \ i \ne j\end{cases}.$$

Thật vậy, theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}(I_E - T)(e_j) &= e_j - \sum_{i\in I} f_i(e_j)(e_i - y_i)\\ &= e_j - (e_j - y_j)\\ &= y_j \ \ \forall j \in I\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}g_i(y_j) &= f_{i\,o}\,(I_E - T)^{-1}(y_j)\\ &= f_{i\,o}\,(I_E - T)^{-1}\left((I_E - T)(e_j)\right)\\ &= f_{i\,o}\,(I_E - T)^{-1}{}_o\,(I_E - T)(e_j)\\ &= f_i(e_j) \ \ \forall i, j \in I.\end{aligned}$$

Theo giả thiết ban đầu ta có hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh của E. Theo Định nghĩa 2.2 (iii), với mỗi $x \in E$, ta có

$$x = \sum_{i\in I} f_i(x)e_i.$$

Do đó, hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in I}$ là $E-$ đầy đủ. Thật vậy, khẳng định này tương đương với kiểm tra điều kiện sau:

$$\overline{span\{e_i\colon \mathrm{i} \in I\}} = E.$$

Bao hàm thức $\overline{span\{e_i\colon \mathrm{i} \in I\}} \subseteq E$ là hiển nhiên bởi vì $e_i \in E \ \ \forall i \in I$ và E là không gian tuyến tính. Bao hàm thức ngược lại $\overline{span\{e_i\colon \mathrm{i} \in I\}} \supseteq E$ có được là do với mỗi $x \in E$, $f_i(x) \in \mathbb{C} \ \forall i \in I$ kéo theo

$$x = \sum_{i\in I} f_i(x)e_i \in \overline{span\{e_i\colon i \in I\}}.$$

Ta kiểm tra hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in I}$ là $E^* -$toàn vẹn. Thật vậy, giả sử với mỗi $x\in E,$

$$f_i(x)=0\ \forall i\in I.$$

Bởi vì $x=\sum_{i\in I} f_i(x)e_i$ nên $x=\sum_{i\in I} 0.e_i=0.$ Theo Định nghĩa 2.1 (iii), hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in I}$ là $E^* -$ toàn vẹn.

Ta kiểm tra hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ cũng là một E^*- toàn vẹn. Cố định $x\in E$ và giả sử rằng

$$g_i(x)=0\ \forall i\in I.$$

Điều này tương đương với

$$f_i\left((I_E-T)^{-1}(x)\right)=0\ \forall i\in I.$$

Vì hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in I}$ là $E^* -$toàn vẹn nên $\left(I_E-T\right)^{-1}(x)=0.$ Vì I_E-T là một đẳng cấu nên $x=0.$ Vậy hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là E^*- toàn vẹn.

Bây giờ ta kiểm tra hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ song trực giao và $E-$ đầy đủ.

Ta có $g_i(y_j)=f_i(e_j)=\delta_{\mathrm{ij}}$ với mọi $i,j\in I$ nên hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là song trực giao.

Ta thấy rằng

$$\overline{span\{y_i\colon \mathrm{i}\in I\}}=E.$$

Thật vậy, vì $y_i\in E\ \ \forall i\in I$ nên bao hàm thức sau đúng:

$$\overline{span\{y_i\colon \mathrm{i}\in I\}}\subseteq E.$$

Ta kiểm tra bao hàm thức ngược lại

$$\overline{span\{y_i\colon \mathrm{i}\in I\}}\supseteq E.$$

Với mọi $y\in E$, do I_E-T là một đẳng cấu nên tồn tại duy nhất $x\in E$ sao cho $y=\left(I_E-T\right)(x).$ Do $\overline{span\{e_i\colon \mathrm{i}\in I\}}=E,$ tồn tại dãy $x^{(v)}\subseteq span\{e_i\colon\ \mathrm{i}\in \mathrm{I}\}$ sao cho $\lim\limits_{v\to+\infty} x^{(v)}=x$. Suy ra

$$\lim_{v\to+\infty}\left(I_E-T\right)\left(x^{(v)}\right)=\left(I_E-T\right)\left(x\right)=y.$$

Bởi vì $\left(I_E-T\right)\left(x^{(v)}\right)\in span\{\left(I_E-T\right)\left(e_i\right)\colon\ \mathrm{i}\in \mathrm{I}\}$ với mọi $v\geq 1$, nên

$$y\in \overline{span\{\left(I_E-T\right)(\mathrm{e}_i)\colon \mathrm{i}\in \mathrm{I}\}}=\overline{span\{y_i : i\in I\}}.$$

Vậy hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là đầy đủ trong $E.$

Lập luận tương tự như trên, với mỗi $y\in E$ tồn tại $x=\sum_{i\in I} f_i(x)e_i$ sao cho

$$y=\left(I_E-T\right)(x)=\left(I_E-T\right)\left(\sum_{i\in I} f_i(x)e_i\right)$$

$$=\sum_{i\in I} f_i(x)\left(I_E-T\right)(e_i)$$

$$=\sum_{i\in I} f_i\left(\left(I_E-T\right)^{-1}(y)\right)\left(I_E-T\right)(e_i)$$

$$=\sum_{i\in I} g_i(y)y_i.$$

Do đó, hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là M-cơ sở mạnh trong E và điều này kết thúc chứng minh.

3.4 Nhận xét

Nếu ta bỏ đi giả thiết (i) trong Định lí 3.3 thì kết quả thu được chỉ là tồn tại một họ $\{g_i\}_{i\in I}\subseteq E^*$ sao cho hệ $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là một M- cơ sở mạnh trong không gian Banach phức E. Thực ra ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục là một hệ quả từ ánh xạ ngược tương ứng $f_{i_0}^{-1}$ liên tục. Từ đây, một ví dụ để minh họa cho kết quả thu được sẽ được đề xuất.

3.5 Ví dụ

Xét không gian Hilbert

$$l_2(I)=\left\{\mathrm{x}=\{x_i\}_{i\in I}\in\mathbb{C} : \sum_{i\in I}\left|x_i\right|^2<+\infty\right\}$$

với tích vô hướng $<.\,,.>$, ở đây

$$<x,\, y>=\sum_{i\in} x_i\overline{y_i},\ \forall x=\{x_i\}_{i\in I},\, y=\{y_i\}_{i\in I}\in l_2(I).$$

Xét họ $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq l_2(I)$ được xác định bởi

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, \, khi \ i = j \\ 0, \, khi \ i \neq j \end{cases}.$$

Với mọi $i \in I,$ xét phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $l_2(I)$ được định nghĩa như sau:

$$f_i(x) =< x, e_i > \quad \forall x \in l_2(I).$$

Khi đó, với mỗi $x \in l_2(I)$ ta dễ dàng thấy rằng

$$x = \sum_{i\in I} < x, e_i > e_i.$$

Vậy hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là $l_2(I)-$đầy đủ. Xét $f_i(x) = 0 \ \forall i \in I.$ Theo định nghĩa ta có

$$x = \sum_{i\in I} < x, e_i > e_i = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i = \sum_{i\in I} 0.e_i = 0.$$

Do vậy, hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là $l_2(I)^*-$toàn vẹn. Theo định nghĩa $M-$cơ sở mạnh, hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là $M-$cơ sở mạnh của $l_2(I).$ Xét hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ xác định bởi

$$y_i = \frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}} e_i \ \ và$$

$$g_i(x) = \frac{2^{i+1}}{2^{i+1}-1} < x, y_i > \ \forall x \in l_2(I).$$

Dễ thấy hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là $M-$cơ sở mạnh của $l_2(I)$, và do $\|f_i\| = 1 \ \forall i \in I$ nên

$$\sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \| = \sum_{i\in I} \frac{1}{2^{i+1}} < 1.$$

Nếu trong hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ chọn

$$y_i = \frac{1}{2} e_i \ \ và \ \ g_i(x) = 2 < x, y_i > \ \forall x \in l_2(I),$$

thì hiển nhiên $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ cũng là $M-$cơ sở mạnh của $l_2(I)$ nhưng giả thiết (ii) không thỏa mãn:

$$\sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \| = \sum_{i\in I} \frac{1}{2} > 1.$$

Như vậy, theo Nhận xét 3.4, kết quả đạt được trong Định lí 3.3 trên thực sự chỉ là điều kiện đủ để hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là $M-$cơ sở mạnh của không gian Banach phức $E.$

Chú ý tập chỉ số I được xét bên trên không nhất thiết phải là tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, một số kết quả về sự ổn định $M-$cơ sở mạnh trong không gian Banach được thiết lập. Hai điều kiện cần liên quan đến các hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ và $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là hai M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E được cung cấp và một điều kiện đủ liên quan đến hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh cho trước cũng được đề cập. Các kết quả thu được trong bài báo là hoàn toàn mới so với các kết quả được công bố trước đây trong (Singer, 1970; Retherford and Holub, 1971 ; Singer, 1981; Sinha, 2000; Kasimov, 2002 ở chỗ sử dụng hai hệ M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E và ánh xạ ngược liên tục để nghiên cứu điều kiện cần và đủ, trong khi các kết quả đã biết trong quá khứ chỉ sử dụng duy nhất cho một hệ M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E và thậm chí tác giả cũng không dùng tính liên tục của ánh xạ ngược. Đó là một sự khác biệt lớn trong bài báo này với các bài báo liên quan đến tính ổn định của $M-$cơ sở dmạnh trong không gian Banach phức được biết trước đây. Một số ví dụ cũng được đề xuất trong bài báo này để minh họa cho các kết quả mới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Kasimov, S.G., 2002. On the stability of Bases in Banach and Hilbert Spaces. Uzbek. Math. Zh. 2: 34-29.

Nguyễn Văn Khuê và Lê Mậu Hải, 2001. Cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm. Tập 2, NXB Giáo dục, Hà Nội, 376 trang.

Paley, R. and Wiener N., 1934. Fourier Transform in the Complex Domain. Amer. Math. Soc., Providence RI.

Retherford, J. J. and Holub, J. R., 1971. The stability of bases in Banach and Hilbert spaces. J. Angew. Math. 246: 136-146.

Sinha, D.B., 2000. On Strong M-bases in Banach Spaces with PRI. Collect. Math. 51 (**3**): 277-284.

Singer, I., 1970. Bases in Banach Spaces I. Spinger-Verlag, Berlin, 252 pages.

Singer, I., 1981. Bases in Banach Spaces II. Spinger- Verlag, Berlin, 324 pages.