Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2017.145

PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG CHO MỘT SỐ ĐỊNH LÍ GIỚI HẠN TRONG XÁC SUẤT

Lê Trường Giang[1] và Trịnh Hữu Nghiệm[2]
[1]*Trường Đại học Tài chính – Marketing*
[2]*Trường Đại học Nam Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 01/07/2017
Ngày nhận bài sửa: 18/09/2017
Ngày duyệt đăng: 29/11/2017

Title:
Characteristic functions method for some of the limit theorems in probability

Từ khóa:
Hàm đặc trưng, tổng ngẫu nhiên, xấp xỉ Gamma, xấp xỉ Laplace, xấp xỉ Poisson phức hợp

Keywords:
Characteristic functions, gamma approximation, laplace approximation, poisson approximation, random sums

ABSTRACT

The main purpose of this article is to use Characteristic functions method to solve some approximation problems in probability such as Compound Poisson approximation, Gamma approximation, and Laplace approximation. The received results are extensions and generalizations of some known results.

TÓM TẮT

Nội dung chính của bài viết này là sử dụng công cụ hàm đặc trưng để giải quyết một số bài toán xấp xỉ trong xác suất như xấp xỉ Poisson phức hợp, xấp xỉ Gamma và xấp xỉ Laplace. Các kết quả nhận được là sự mở rộng và khái quát hóa một số kết quả đã có.

Trích dẫn: Lê Trường Giang và Trịnh Hữu Nghiệm, 2017. Phương pháp hàm đặc trưng cho một số định lí giới hạn trong xác suất. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 53a: 88-95.

1 GIỚI THIỆU

Một trong những kết quả quan trọng nhất của lý thuyết xác suất là các định lý giới hạn. Các định lý giới hạn được biết như là nền tảng cho các suy luận thống kê, phân tích tài chính cũng như dự báo trong kinh doanh và nhiều vấn đề liên quan khác (Feller, 1971a; Feller, 1971b; Nguyễn Duy Tiến và Vũ Viết Yên, 2000; Nguyễn Duy Tiến, 2000). Chính vì vậy, nhiều nhà toán học đã tập trung vào nghiên cứu các định lý giới hạn, trong số đó định lý giới hạn trung tâm và luật số lớn thường được quan tâm nhiều hơn. Tuy nhiên, trong thời đại ngày nay, một số yêu cầu thực tế đòi hỏi ta phải có những cơ sở lý thuyết nằm ngoài phạm vi của hai bài toán nói trên. Đã đến lúc một số bài toán mà những ứng dụng của nó trong thực tế cần phải được quan tâm nhiều hơn (Kalashnikov, 1997; Nguyễn Duy Tiến, 2000; Minkova, 2010). Một số ứng dụng phải kể đến như ứng dụng trong lĩnh vực phân tích kinh tế, bảo hiểm, bài toán đầu tư, bưu chính viễn thông, đánh giá hiệu năng hệ thống máy tính, y tế...

Để giải quyết các bài toán xấp xỉ trong xác suất, các nhà toán học trong và ngoài nước đã sử dụng nhiều phương pháp khác nhau, chẳng hạn như phương pháp Stein (Barbour and Chen, 2004; Tran Loc Hung and Le Truong Giang, 2016a), phương pháp toán tử (Renyi, 1970; Tran Loc Hung and Le Truong Giang, 2014; Tran Loc Hung and Le

Truong Giang, 2016b; Trịnh Hữu Nghiệm và Lê Trường Giang, 2016), phương pháp hàm đặc trưng (Eugene Lukacs, 1970; Tran Loc Hung *et al*., 2008; Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, 2010). Mỗi phương pháp đều có những ưu điểm cũng như hạn chế riêng của nó. Trong khuôn khổ bài viết này, phương pháp hàm đặc trưng sẽ được sử dụng để giải quyết bài toán xấp xỉ Poisson phức hợp, xấp xỉ Gamma và xấp xỉ Laplace. Các kết quả nhận được là sự tổng quát hóa một số kết quả trong Kalashnikov, 1997; Tran Loc Hung *et al*, 2008; Tran Loc Hung, and Tran Thien Thanh, 2010; Trịnh Hữu Nghiệm và Lê Trường Giang, 2016.

Bài viết được chia làm bốn mục, mục một dành cho việc giới thiệu tổng quan vấn đề nghiên cứu, mục hai trình bày đôi nét về phương pháp hàm đặc trưng (định nghĩa, tính chất và các bổ đề quan trọng), mục ba là phần đưa ra các kết quả chính của bài viết và mục bốn là phần kết luận.

2 PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG

Định nghĩa 2.1 Giả sử F_X là hàm phân phối của đại lượng ngẫu nhiên X, ta gọi hàm biến thực $\varphi_X(t), t \in \mathbb{R}$ được xác định bằng hệ thức

$$\varphi_X(\mathrm{t}) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_X(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF_X(x)$$

là hàm đặc trưng của phân phối F_X.

Một vài tính chất quan trọng của hàm đặc trưng:

1. $\left|\varphi_X(\mathrm{t})\right| \le \varphi_X(0) = 1, \forall t \in \mathbb{R};$
2. $\varphi_X(t)$ liên tục đều trên $\mathbb{R};$
3. Nếu X và Y độc lập với nhau thì $\forall t \in \mathbb{R}$, ta có $\varphi_{X+Y}(\mathrm{t}) = \varphi_X(\mathrm{t}).\varphi_Y(\mathrm{t})$. Do đó nếu $X_1, X_2, \ldots X_n$ độc lập thì $\forall t \in \mathbb{R}$, ta có $\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(\mathrm{t}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\mathrm{t});$
4. Với mọi số thực a và b ta có $\varphi_{aX+b}(\mathrm{t}) = e^{ibt}\varphi_X(at);$
5. Nếu $E\left|X\right|^n < \infty$ với $n \ge 1$ thì $\varphi_X(t)$ có đạo hàm đến cấp n tại mọi điểm và

$$\varphi_X^{(k)}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dF_X(x) = i^k E\left(X^k e^{itX}\right).$$

Các tính chất này được chứng minh chi tiết trong nghiên cứu của Eugene Lukacs, 1970; Renyi, 1970 và Feller, 1971b .

Cho N là biến ngẫu nhiên có giá trị nguyên, không âm và $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối và độc lập với N. Biến ngẫu nhiên

$$S_N = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n, & N = n \end{cases}$$

được gọi là tổng ngẫu nhiên. Để đơn giản ta kí hiệu $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, trong đó ta quy ước $S_N = 0$ nếu $N = 0.$

Ta có hai bổ đề quan trọng sau liên quan đến hàm đặc trưng và được áp dụng trong phần chứng minh các kết quả chính:

Bổ đề 2.1 Giả sử $\psi_N(t) = E(t^N)$ là hàm sinh của biến ngẫu nhiên N và biến ngẫu nhiên X có hàm đặc trưng $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$. Khi đó hàm đặc trưng của S_N được xác định như sau:

$$\varphi_{S_N}(t) = \psi_N\left[\varphi_X(t)\right].$$

Bổ đề 2.2 Nếu X là biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên với hàm đặc trưng $\varphi_X(t)$ thì

$$\mathrm{P}\left(X = k\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\varphi_X(\mathrm{t})dt, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kỹ thuật chứng minh cho hai bổ đề trên trong nghiên cứu của Eugene Lukacs, 1970; Feller, 1971b; Nguyễn Duy Tiến và Vũ Viết Yên, 2000.

3 CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Trong các mục sau ký hiệu $\xrightarrow{d}$ được dùng để chỉ sự hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên.

3.1 Bài toán xấp xỉ Poisson phức hợp

Định nghĩa 3.1 Cho $\{X_n, n \ge 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X, Z là biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số λ. Khi đó, tổng ngẫu nhiên

$S_Z = \sum_{j=1}^{Z} X_j$ được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối được Poisson phức hợp.

Hàm đặc trưng của S_Z được xác định là $\varphi_{S_Z}(t) = e^{\lambda(\varphi_X(t)-1)}$, trong đó $\varphi_X(t)$ là hàm đặc trưng của X.

Định lí 3.1 Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên, độc lập, cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X. Khi đó $\forall k \in \mathbb{Z}_+, p_i \in [0,1]$, ta có $\left|P\left(S_{W_n} = k\right) - P\left(S_{Z_{\lambda_n}} = k\right)\right| \leq 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2$, trong đó $Z_{\lambda_n} \sim \text{Poisson}(\lambda_n)\left(\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ và $W_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $\left(Y_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)\right)$.

Chứng minh.

Ta có hàm đặc trưng của $S_{Z_{\lambda_n}}$ là $\varphi_{S_{Z_{\lambda_n}}}(t) = e^{\lambda_n[\varphi_X(t)-1]} = \prod_{i=1}^{n} e^{p_i[\varphi_X(t)-1]}$.

Do $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ nên ta có hàm sinh của Y_i là $\psi_{Y_i}(t) = E(t^{Y_i}) = p_i(t-1)+1$.

Suy ra hàm đặc trưng của S_{W_n} là

$$\varphi_{S_{W_n}}(t) = \psi_{W_n}\left[\varphi_X(t)\right] = \prod_{i=1}^{n} \psi_{Y_i}\left[\varphi_X(t)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left\{p_i\left[\varphi_X(t)-1\right]+1\right\}$$

Ta có

$$\left|\varphi_{S_{W_n}}(t) - \varphi_{S_{Z_{\lambda_n}}}(t)\right|$$

$$= \left|\prod_{i=1}^{n}\left(p_i\left[\varphi_X(t)-1\right]+1\right) - \prod_{i=1}^{n} e^{p_i[\varphi_X(t)-1]}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left|e^{p_i[\varphi_X(t)-1]} - 1 - p_i\left[\varphi_X(t)-1\right]\right|$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Theo Bổ đề 2.2, ta có

$$\left|P\left(S_{W_n} = k\right) - P\left(S_{Z_{\lambda_n}} = k\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\left(\varphi_{S_{W_n}}(t) - \varphi_{S_{Z_{\lambda_n}}}(t)\right)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_{S_{W_n}}(t) - \varphi_{S_{Z_{\lambda_n}}}(t)\right|dt$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Vậy $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, ta nhận được

$$\left|P\left(S_{W_n} = k\right) - P\left(S_{Z_{\lambda_n}} = k\right)\right| \leq 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Nhận xét 3.1 $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, ta có $\left|P\left(S_{W_n} = k\right) - P\left(S_{Z_{\lambda_n}} = k\right)\right| \leq 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \leq 2\max_{1\leq i\leq n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i$. Nên khi $\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq i\leq n} p_i = 0$ và $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} p_i = \lambda(0<\lambda<+\infty)$ thì $S_{W_n} \xrightarrow{d} S_Z \quad (n\to\infty)$.

Hệ quả 3.1 Giả sử $\{X_n, n\geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối và $W_n \sim Binomial(n, p_n)$ thỏa mãn $np_n \to \lambda, p_n \to 0$ khi $n\to\infty$. Khi đó, $S_{W_n} \xrightarrow{d} S_Z$.

Nhận xét 3.2 Ta nhận thấy rằng hệ quả 3.1 chỉ là một trường hợp đặc biệt của định lý 3.1 khi xem xét các biến $Y_i, i = 1,2,..,n$ có cùng phân phối Bernoulli với tham số p_n $\left(p_1 = p_2 = ... = p_n\right)$. Hệ quả này đã được chứng minh trong Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, 2010.

3.2 Bài toán xấp xỉ Gamma

Định nghĩa 3.2 Biến ngẫu nhiên ζ được gọi là có phân phối nhị thức âm với tham số dương $r, p (r = 1,2,...; 0 < p < 1)$, kí hiệu $\zeta \sim NB(r,p)$, nếu X nhận các giá trị $k = r, r+1, ...$ với xác suất tương ứng là:

$$P(\zeta = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k \geq r.$$

Hàm đặc trưng và hàm sinh của ζ được xác định tương ứng như sau:

$$\varphi_\zeta(t)=\left[\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right]^r;\psi_\zeta(t)=\left[\frac{pt}{1-(1-p)t}\right]^r.$$

Khi $r=1$ thì phân phối nhị thức âm chính là phân phối hình học.

Định nghĩa 3.3 Biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$ được gọi là có phân phối Gamma với hai tham số dương r và λ, kí hiệu $\mathcal{G}\sim Gamma(r,\lambda)$, nếu $\mathcal{G}$ có hàm mật độ là

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & \text{khi} \quad x>0,\\ 0 & \text{khi} \quad x\le 0,\end{cases}$$

trong đó hàm $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$ là hàm Gamma. Hàm đặc trưng của X là $\varphi_{\mathcal{G}}(t)=\left[\lambda/(\lambda-it)\right]^r$.

Khi $r=1$ thì phân phối Gamma chính là phân phối mũ. Khi $r=\frac{n}{2}$ và $\lambda=\frac{1}{2}$ thì phân phối Gamma được gọi là phân phối Chi- bình phương.

Định lí 3.2 Giả sử $\{X_n, n\ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X, với $X\sim \text{Exp}(\lambda)$. Gọi $\zeta\sim NB(r,p)$ và độc lập với các biến ngẫu nhiên $X_n, n\ge 1$. Khi đó tổng ngẫu nhiên

$$S_\zeta=\sum_{i=1}^{\zeta}X_i\sim \text{Gamma}(r,\lambda p).$$

Chứng minh.

Ta có hàm sinh của biến ngẫu nhiên ζ là $\psi_\zeta(t)=\left[pt/1-(1-p)t\right]^r$ và hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên X là $\varphi_X(t)=\lambda/\lambda-it$. Khi đó hàm đặc trưng của S_ζ là

$$\varphi_{S_\zeta}(t)=\psi_\zeta[\varphi_X(t)]=\left[\frac{p.\dfrac{\lambda}{\lambda-it}}{1-(1-p).\dfrac{\lambda}{\lambda-it}}\right]^r$$

$$=\left(\frac{\lambda p}{\lambda p-it}\right)^r.$$

Vậy $S_\zeta\sim \text{Gamma}(r,\lambda p)$.

Khi $r=1$ (lúc này phân phối nhị thức âm trở thành phân phối hình học), ta có hệ quả sau

Hệ quả 3.2 Giả sử $\{X_n, n\ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng tuân theo phân phối mũ với tham số λ, $\nu\sim \text{Geometric}(p), 0<\text{p}<1$ và ν độc lập với các biến ngẫu nhiên $X_n, n\ge 1$. Khi đó,

$$S_\nu=\sum_{i=1}^{\nu}X_i\sim \text{Exp}(\lambda p).$$

Nhận xét 3.3 Hệ quả 3.2 đã được chứng minh trong Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, 2010.

Định lí 3.3 Giả sử $\{X_n, n\ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm, độc lập, cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X và có kỳ vọng hữu hạn $\text{E}(X)=m<+\infty$. Đặt $\zeta\sim NB(r,p)$ và độc lập với tất cả các $X_n, n\ge 1$. Khi đó với $p\to 0^+$ thì $\frac{S_\zeta}{E(\zeta)}\xrightarrow{d}\mathcal{G}$, trong đó $S_\zeta=\sum_{i=1}^{\zeta}X_i$ và $\mathcal{G}\sim Gamma\left(r, r/m\right)$.

Chứng minh.

Gọi $\varphi_X(t)$ là hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên X. Khi đó hàm đặc trưng của S_ζ được xác định như sau:

$$\varphi_{S_\zeta}(t)=\psi[\varphi_X(t)]=\left[\frac{p\varphi_X(t)}{1-(1-p)\varphi_X(t)}\right]^r.$$

Từ đó, ta có hàm đặc trưng của $\frac{S_\zeta}{E(\zeta)}$ là

$$\varphi_{\frac{S_\zeta}{E(\zeta)}}(t)=\varphi_{S_\zeta}\left(\frac{p}{r}t\right)=\left[\frac{p\varphi_X\left(\frac{p}{r}t\right)}{1-(1-p)\varphi_X\left(\frac{p}{r}t\right)}\right]^r.$$

Áp dụng khai triển Taylor cho hàm φ_X, tồn tại c ở giữa 0 và $\frac{pt}{r}$ sao cho

$$\varphi_X\left(\frac{p}{r}t\right)=\varphi_X(0)+\frac{p}{r}t\varphi'_X(c)=1+\frac{p}{r}t\varphi'_X(c).$$

Do đó,

$$\varphi_{\frac{S_\zeta}{E(\zeta)}}(t)=\left[\frac{p\varphi_X\left(\frac{p}{r}t\right)}{1-(1-p)\varphi_X\left(\frac{p}{r}t\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{1+\frac{p}{r}t\varphi'_X(c)}{1-\frac{t}{r}\varphi'_X(c)+\frac{p}{r}t\varphi'_X(c)}\right]^r.$$

Cho $p\to 0^+$ thì $\frac{pt}{r}\to 0^+$, tức là $c\to 0$. Khi đó

$$\lim_{p\to 0^+}\varphi_{\frac{S_\zeta}{E(\zeta)}}(t)=\left[\frac{1}{1-\frac{t}{r}\varphi'_X(0)}\right]^r=\left[\frac{\frac{r}{m}}{\frac{r}{m}-it}\right]^r.$$

Vậy khi $p\to 0^+$ thì $\frac{S_\zeta}{E(\zeta)}\xrightarrow{d}\mathcal{G}.$

Hệ quả 3.3 Giả sử $\{X_n, n\geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm, độc lập, cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X và kỳ vọng hữu hạn $E(X)=m<+\infty$. Khi đó với $p\to 0^+$ thì $\frac{S_\nu}{E(\nu)}\xrightarrow{d}Z$, trong đó $Z\sim Exp\left(1/m\right)$.

Nhận xét 3.4 Hệ quả 3.3 đã được chứng minh bởi Kalashnikov (1997). Ta nhận thấy rằng định lý 3.3 là sự tổng quát hóa cho kết quả năm 1997 của Kalashnikov khi xét cho r là một số nguyên dương bất kỳ.

Định lí 3.4 Giả sử $\{X_n, n\geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối chuẩn tắc ($X_j\sim N(0,1), j=1,2,...), \zeta\sim NB(r,p)$ và $\mathcal{G}^*\sim \text{Gamma}(r,r)$. Đặt $S_\zeta^2=X_1^2+X_2^2+...+X_\zeta^2$. Khi đó, nếu $p\to 0^+$ thì

$$\frac{S_\zeta^2}{E(\zeta)}\xrightarrow{d}\mathcal{G}^*.$$

Chứng minh.

Ta có

$$\varphi_{\mathcal{G}^*}(t)=\left(\frac{r}{r-it}\right)^r.$$

Ta có $X_j\sim N(0,1)$ nên suy ra $X_j^2\sim\chi^2(1)$, ở đây $\chi^2(1)$ là phân phối Chi bình phương với bậc tự do 1, như vậy ta xác định được hàm đặc trưng của X_j^2 là $\varphi_{X_j^2}(t)=\frac{1}{\sqrt{1-2it}}$.

Ta có hàm đặc trưng của S_ζ^2 là

$$\varphi_{S_\zeta^2}(t)=\psi_\zeta\left[\varphi_{X_j^2}(t)\right]=\left[\frac{p\varphi_{X_j^2}(t)}{1-(1-p)\varphi_{X_j^2}(t)}\right]^r.$$

Suy ra hàm đặc trưng của $\frac{S_\zeta^2}{E(\zeta)}$ là

$$\varphi_{\frac{S_\zeta^2}{E(\zeta)}}(t)=\varphi_{S_\zeta^2}\left(\frac{p}{r}t\right)=\left[\frac{p\varphi_{X_j^2}\left(\frac{p}{r}t\right)}{1-(1-p)\varphi_{X_j^2}\left(\frac{p}{r}t\right)}\right]^r$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-2i\frac{p}{r}t}+1-p}{2-2i\frac{t}{r}-p}\right)^r.$$

Khi cho $p\to 0^+$, ta được

$$\varphi_{\frac{S_\zeta^2}{E(\zeta)}}(t)\to\left(\frac{r}{r-it}\right)^r=\varphi_{\mathcal{G}^*}(t).$$

Hệ quả 3.4 Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, $X_j \sim N(0,1)$ và $Z^* \sim Exp(1)$. Khi đó, nếu $p \to 0$ thì

$$p(X_1^2 + X_2^2 + ... + X_\nu^2) \xrightarrow{d} Z^*.$$

Nhận xét 3.5 Hệ quả 3.4 đã được chứng minh bởi Tran Loc Hung *et al.*, 2008. Rõ ràng kết quả năm 2008 của nhóm tác giả này là một trường hợp đặc biệt của định lý 3.4 khi xét cho $r = 1$.

3.3 Bài toán xấp xỉ Laplace

Định nghĩa 3.4 Biến ngẫu nhiên $\mathcal{L}$ được gọi là có phân phối Laplace, kí hiệu $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}(m, a, \sigma)$, nếu $\mathcal{L}$ có hàm đặc trưng được xác định như sau:

$$\varphi_{\mathcal{L}}(t) = \frac{e^{imt}}{1 - iat + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}},$$ trong đó $\sigma > 0, m, a, t \in \mathbb{R}$.

Số a được gọi là tham số đối xứng. Nếu $a = 0$ thì $\mathcal{L}(m, 0, \sigma)$ được gọi là phân phối Laplace đối xứng.

Định lí 3.5 Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X, với $X \sim \mathcal{L}\left(0, \sqrt{\dfrac{p}{r}}a, \sigma\right)$. Gọi $\zeta \sim NB(r, p)$ và độc lập với các biến ngẫu nhiên $X_n, n \geq 1$. Khi đó, $\dfrac{S_\zeta}{\sqrt{E(\zeta)}} \sim \mathcal{L}$, ở đây $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + ... + \mathcal{L}_r$ và

$\mathcal{L}_j \sim \text{Laplace}(0, \dfrac{a}{r}, \dfrac{\sigma}{\sqrt{r}}), j = 1, 2, ...r.$

Chứng minh.

Ta có hàm đặc trưng của X là $\varphi_X(t) = \dfrac{1}{1 - i\sqrt{\dfrac{p}{r}}at + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}}$. Khi đó hàm đặc trưng của S_ζ là

$$\varphi_{S_\zeta}(t) = \psi_\zeta[\varphi_X(t)] = \left[\frac{p\varphi_X(t)}{1 - (1-p)\varphi_X(t)}\right]^r$$

$$= \left(\frac{p}{p - i\sqrt{\dfrac{p}{r}}at + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}}\right)^r.$$

Suy ra hàm đặc trưng của $\dfrac{S_\zeta}{\sqrt{E(\zeta)}}$ là

$$\varphi_{\frac{S_\zeta}{\sqrt{E(\zeta)}}}(t) = \varphi_{S_\zeta}\left(\sqrt{\frac{p}{r}}t\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - i\dfrac{at}{r} + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2r}}\right)^r = \prod_{j=1}^r \varphi_{\mathcal{L}_j}(t).$$

Vậy $\dfrac{S_\zeta}{\sqrt{E(\zeta)}} \sim \mathcal{L}.$

Khi $r = 1$ và $a = 0$ ta nhận được hệ quả sau:

Hệ quả 3.5 Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X, với $X \sim \mathcal{L}(0, 0, \sigma)$ và độc lập với biến ngẫu nhiên ν. Khi đó, $\dfrac{S_\nu}{\sqrt{E(\nu)}} \sim \mathcal{L}$, ở đây $\mathcal{L} \sim \text{Laplace}(0, 0, \sigma)$.

Nhận xét 3.6 Hệ quả 3.5 đã được chứng minh trong Trịnh Hữu Nghiệm và Lê Trường Giang, 2016.

Định lí 3.6 Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X, với $E(X) = 0$ và $E(X^2) = \sigma^2 < +\infty$. Đặt $\zeta \sim NB(r, p)$ độc lập với các $X_n, n \geq 1$. Khi đó, với $p \to 0^+$ thì

$\frac{S_\zeta^*}{\sqrt{E(\zeta)}} \xrightarrow{d} \mathcal{L}$, trong đó $S_\zeta^* = \sum_{i=1}^{\zeta}\left(X_i + \sqrt{\frac{p}{r}}a\right)$

và $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \ldots + \mathcal{L}_r$ với

$\mathcal{L}_j \sim \text{Laplace}\left(0, \frac{a}{r}, \frac{\sigma}{\sqrt{r}}\right), j = 1, 2, \ldots, r.$

Chứng minh.

Đặt $W = X + \sqrt{\frac{p}{r}}a$ và gọi $\varphi_W(t)$ là hàm đặc trưng của W, khi đó hàm đặc trưng của S_ζ^* là

$$\varphi_{S_\zeta^*}(t) = \psi_\zeta\left[\varphi_W(t)\right] = \left[\frac{p\varphi_W(t)}{1-(1-p)\varphi_W(t)}\right]^r.$$

Suy ra hàm đặc trưng của $\frac{S_\zeta^*}{\sqrt{E(\zeta)}}$ được xác định như sau:

$$\varphi_{\frac{S_\zeta^*}{\sqrt{E(\zeta)}}}(t) = \varphi_{S_\zeta^*}\left(\sqrt{\frac{p}{r}}t\right) = \left[\frac{p\varphi_W\left(\sqrt{\frac{p}{r}}t\right)}{1-(1-p)\varphi_W\left(\sqrt{\frac{p}{r}}t\right)}\right]^r.$$

Áp dụng khai triển Taylor cho hàm φ_W, ta có

$$\begin{aligned}\varphi_W\left(\sqrt{\frac{p}{r}}t\right) &= \varphi_W(0) + \sqrt{\frac{p}{r}}t\varphi_W'(0) + \frac{pt^2}{2r}\varphi_W''(c)\\ &= 1 + i\sqrt{\frac{p}{r}}tE(W) + \frac{pt^2}{2r}\varphi_W''(c)\\ &= 1 + \frac{ipat}{r} + \frac{pt^2}{2r}\varphi_W''(c),\end{aligned}$$

trong đó c nằm giữa 0 và $\sqrt{\frac{p}{r}}t.$

Do đó,

$$\begin{aligned}&\varphi_{\frac{S_\zeta^*}{\sqrt{E(\zeta)}}}(t)\\ &= \left[\frac{p\varphi_W\left(\sqrt{\frac{p}{r}}t\right)}{1-(1-p)\varphi_W\left(\sqrt{\frac{p}{r}}t\right)}\right]^r\\ &= \left[\frac{p\left(1+\frac{ipat}{r}+\frac{pt^2}{2r}\varphi_W''(c)\right)}{1-(1-p)\left(1+\frac{ipat}{r}+\frac{pt^2}{2r}\varphi_W''(c)\right)}\right]^r\\ &= \left[\frac{1+\frac{ipat}{r}+\frac{pt^2}{2r}\varphi_W''(c)}{1-\frac{iat}{r}+\frac{ipat}{r}-\frac{t^2}{2r}\varphi_W''(c)+\frac{pt^2}{2r}\varphi_W''(c)}\right]^r.\end{aligned}$$

Do $p \to 0^+$, dẫn đến $\sqrt{\frac{p}{r}}t \to 0^+$ nên suy ra $c \to 0$. Khi đó,

$$\lim_{p\to 0^+}\varphi_{\frac{S_\zeta^*}{\sqrt{E(\zeta)}}}(t) = \left[\frac{1}{1-\frac{iat}{r}+\frac{\sigma^2t^2}{2r}}\right]^r = \varphi_{\sum_{j=1}^{r}\mathcal{L}_j}(t).$$

Ta dễ dàng kiểm tra thấy rằng $\varphi_{\sum_{j=1}^{n}\mathcal{L}_j}(t)$ là hàm đặc trưng của tổng $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \cdots + \mathcal{L}_r$.

Khi $r = 1$ và $a = 0$ ta nhận được hệ quả sau:

Hệ quả 3.6 Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X với $\mathrm{E}(X) = 0$ và phương sai $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$. Giả sử $X_i (i \geq 1)$ độc lập với ν. Khi đó, với $p \to 0^+$ thì $\sqrt{p}S_\nu \xrightarrow{d} \mathcal{L}^*$, trong đó $\mathcal{L}^* \sim L(0, 0, \sigma)$.

Nhận xét 3.7 Hệ quả 3.6 đã được chứng minh trong Trịnh Hữu Nghiệm và Lê Trường Giang, 2016. Như vậy, định lý 3.6 là mở rộng đáng kể khi giải quyết bài toán xấp xỉ Laplace ở trường hợp tổng quát hơn thay vì chỉ giới hạn cho trường hợp đối xứng $(a=0)$ như các kết quả của nhóm tác giả đã công bố năm 2016.

4 KẾT LUẬN

Áp dụng phương pháp hàm đặc trưng, từng bài toán nêu ra ở trên đã lần lượt được giải quyết. Các kết quả nhận được là sự mở rộng và khái quát hóa một số kết quả đã có trong Kalashnikov, 1997; Tran Loc Hung *et al*., 2008; Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, 2010; Trịnh Hữu Nghiệm và Lê Trường Giang, 2016. Cụ thể như sau:

Trong bài toán xấp xỉ Poisson phức hợp, thay vì xét chỉ số của tổng ngẫu nhiên là một biến nhị thức (tổng các biến Bernoulli có cùng phân phối) thì trường hợp tổng quát hơn với chỉ số của tổng là biến Poisson – Binomial (tổng các biến Bernoulli không cùng phân phối) đã được giải quyết.

Trong bài toán xấp xỉ Gamma, với nhận xét khi $r=1$ thì phân phối nhị thức âm chính là phân phối hình học và phân phối Gamma chính là phân phối mũ, thay vì xét sự hội tụ của tổng ngẫu nhiên với chỉ số của tổng là biến hình học tiến tới phân phối mũ $\left(\frac{S_V}{E(v)} \xrightarrow{d} Z\right)$ thì các tác giả đã giải quyết bài toán với chỉ số của tổng là phân phối nhị thức âm và có sự hội tụ đến phân phối Gamma $\left(\frac{S_\zeta}{E(\zeta)} \xrightarrow{d} \mathcal{G}\right)$.

Trong bài toán xấp xỉ Laplace, ngoài việc thay chỉ số của tổng ngẫu nhiên từ biến hình học thành biến nhị thức âm, ở trường hợp tổng quát hơn (không nhất thiết phải có tính đối xứng hay $a=0$) cũng được giải quyết và nhận được các kết quả là sự mở rộng và khái quát hóa một số kết quả đã biết.

Hướng phát triển của vấn đề nghiên cứu là đánh giá tốc độ hội tụ của các bài toán xấp xỉ như đã nêu ở phần trên bằng phương pháp hàm đặc trưng; đồng thời xem xét đến tính phụ thuộc của các biến ngẫu nhiên mà cụ thể là dạng m-phụ thuộc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Barbour A. D and Chen L. H. Y., 2004. An introduction to Stein's method, Vol.4. Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 225.

Lukacs E., 1970. Characteristic Functions. Charles Griffin & Company Limited. London, 216.

Feller W., 1971a. An introduction to probability theory and its applications, volume I, third edition. John Wiley and Sons, New York, 509.

Feller W., 1971b. An introduction to probability theory and its applications, volume II, 2nd edition. John Wiley and Sons, New York, 669.

Kalashnikov, V., 1997. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications, Volume 413. Kluwer Academic Publisher. the Netherlands, 259.

Minkova L. D., 2010. Insurance Risk Theory. Lecture Notes, TEMPUS Project SEE doctoral studies in mathematical sciences.

Nguyễn Duy Tiến, 2000. Các mô hình xác suất và ứng dụng, phần I. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 172.

Nguyễn Duy Tiến và Vũ Viết Yên, 2000. Lý thuyết xác suất. Nhà xuất bản Giáo dục, 395.

Renyi A., 1970. Probability Theory. Akademiai Kiado. Budapest, 667.

Tran Loc Hung and Le Truong Giang, 2014. On bounds in Poisson approximation for integer-valued independent random variables. Journal of Inequalities and Applications, 2014(1):291.

Tran Loc Hung, and Le Truong Giang, 2016a. On bounds in Poisson approximation for distributions of independent negative-binomial distributed random variables. SpringerPlus, 5(1):79.

Tran Loc Hung, and Le Truong Giang, 2016b. On the bounds in Poisson approximation for independent geometric distributed random variables. Bulletin of the Irannian Mathematical Society, Vol. 42(5): 1087—1096.

Tran Loc Hung, and Tran Thien Thanh, 2010. Some results on asymptotic behaviors of random sums of independent identically distributed random variables. Commun. Korean Math. Soc., 25(1): 119-128.

Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh, and Bui Quang Vu, 2008. Some results related to distribution functions of Chi-square type random variables with random degrees of freedom. Bull. Korean Math. Soc., 45(3): 509-522.

Trịnh Hữu Nghiệm và Lê Trường Giang, 2016. Phương pháp toán tử Trotter cho xấp xỉ Laplace đối xứng. Tạp chí khoa học Trường Đại học Cần Thơ, 47(1): 120-126.