Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2018.039

XẤP XỈ POISSON TRÊN KHÔNG GIAN D-CHIỀU QUA KHOẢNG CÁCH TROTTER-RÉNYI

Lê Trường Giang[1*] và Trịnh Hữu Nghiệm[2]

[1]*Trường Đại học Tài chính - Marketing*
[2]*Trường Đại học Nam Cần Thơ*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lê Trường Giang (email: ltgiang@ufm.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 02/08/2017
Ngày nhận bài sửa: 11/10/2017
Ngày duyệt đăng: 27/04/2018

Title:
Poisson approximation on d-dimensional space via Trotter-Rényi distance

Từ khóa:
Khoảng cách Trotter-Rényi, không gian d-chiều, tổng ngẫu nhiên, vectơ ngẫu nhiên Bernoulli, xấp xỉ Poisson

Keywords:
Bernoulli random vector, d-dimensional space, Poisson approximation, Random sums, Trotter-Rényi distance

ABSTRACT

The main purpose of this article is to use Trotter-Rényi distance to solve Poisson approximation problems in d-dimensional space. Besides solving the problem for the case of determination sums, this article also considers the case of random sums. The results are extensions and generalizations of some known results.

TÓM TẮT

Mục đích chính của bài báo là sử dụng công cụ khoảng cách Trotter-Rényi để giải quyết các bài toán xấp xỉ Poisson trên không gian d-chiều. Bên cạnh việc giải quyết bài toán cho trường hợp tổng tất định, bài viết còn xét cho cả trường hợp tổng ngẫu nhiên. Các kết quả nhận được là sự mở rộng và khái quát hóa một số kết quả đã biết.

Trích dẫn: Lê Trường Giang và Trịnh Hữu Nghiệm, 2018. Xấp xỉ poisson trên không gian d-chiều qua khoảng cách Trotter-Rényi. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 54(3A): 53-58.

1 GIỚI THIỆU

Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các vectơ ngẫu nhiên độc lập, nhận phân phối Bernoulli d-chiều trong $\mathbb{R}^d$, $X_k = \left(X_k(1), X_k(2), \ldots, X_k(d)\right); k, d \in \mathbb{N}$, với xác suất thành công

$$P(X_k = e_j) = p_{kj} \in [0,1], k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, d;$$

$$P(X_k = \Theta) = 1 - \sum_{j=1}^{d} p_{kj} \in [0,1],$$

ở đây, $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^d$ được ký hiệu là vectơ nhận giá trị 1 tại vị trí thứ j và nhận giá trị 0 tại các vị trí còn lại; $\Theta = (0, 0, ..., 0)$. Đặt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \left(S_n(1), S_n(2), ..., S_n(d)\right),$$

trong đó $S_n(j) = \sum_{k=1}^{n} X_k(j)$. Ta ký hiệu $\lambda_n(j) := E\left[S_n(j)\right] = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}$, $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ là kỳ vọng của tổng thành phần $S_n(j)$ của S_n.

Phân phối của S_n được xấp xỉ bởi phân phối Poisson d-chiều Z_{λ_n} với vectơ trung bình $\lambda_n = \left(\lambda_n(1), \lambda_n(2), ..., \lambda_n(d)\right)$, ta có

$$P\left(Z_{\lambda_n} = m\right) = \prod_{j=1}^{d} \left(e^{-\lambda_n(j)} \frac{\left[\lambda_n\left(j\right)\right]^{m_j}}{m_j!} \right),$$

$$m = \left(m_1, m_2, \ldots, m_d\right) \in \mathbb{Z}_+^d,$$

trong đó

$$\mathbb{Z}_+ = \left\{0, 1, 2, \ldots\right\}, \lambda_n(j) = E\left[S_n(j)\right] = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}.$$

Để tìm hiểu chi tiết hơn về phân phối của các vectơ ngẫu nhiên trên, bạn đọc có thể tham khảo Deheuvels and Pfeifer (1988), Barbour, Holst and Janson (1992), Chen (1975) và Roos (1998).

Trong suốt tiến trình phát triển của lý thuyết xác suất nói chung và các định lý giới hạn nói riêng, bài toán xấp xỉ Poisson trên không gian d-chiều đã thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trong và ngoài nước. Các ứng dụng của bài toán này trong thực tế ngày càng trở nên cần thiết và đòi hỏi phải có một cơ sở lý thuyết mở rộng hơn nữa. Một số ứng dụng có thể được tìm thấy trong nhiều lĩnh vực như phân tích kinh tế, bảo hiểm, bài toán đầu tư, bưu chính viễn thông,... (Nguyễn Duy Tiến, 2000; Minkova, 2010).

Năm 1980, trong một bài báo đăng trên tạp chí thống kê của Canada, McDonald đã cho ra một kết quả của bài toán xấp xỉ Poisson trên không gian d-chiều, $d \geq 1$, (McDonald, 1980),

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} \left| P\left(S_n = m\right) - P\left(Z_{\lambda_n} = m\right) \right| \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right)^2.$$

Ra đời vào năm 1972 bởi nhà toán học lỗi lạc ngời Mỹ - Charles M. Stein, phương pháp mang tên ông (phương pháp Stein) đã không ngừng phát triển và được áp dụng cho hầu hết các định lý giới hạn trong xác suất (Stein, 1972). Sau đó năm 1975, một học trò xuất sắc của ông là Louis Chen, đã cải tiến phương pháp của thầy mình và áp dụng thành công cho bài toán xấp xỉ Poisson (Chen, 1975). Cái tên phương pháp Stein-Chen cũng xuất phát từ đó. Năm 1988, Barbour đã sử dụng phương pháp Stein-Chen để đưa ra một cận của bài toán và cận này thì tốt hơn cận được McDonald đưa ra năm 1980 (Barbour, 1988):

$$d_{TV} \leq \sum_{k=1}^{n} \min \left\{ \left(\frac{1}{2} + \log^+ \left(2 \sum_{j=1}^{d} \lambda_n(j)\right) \right) \sum_{j=1}^{d} \frac{p_{kj}^2}{\lambda_n(j)}, \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right)^2 \right\},$$

trong đó $\log^+\left(x\right) = \max\left\{0, \log\left(x\right)\right\}$ với $x \in \mathbb{R}$ và d_{TV} là khoảng cách biến phân toàn phần, được xác định bởi

$$d_{TV} = \sup_{A \subseteq \mathbb{Z}_+^d} \left| P\left(S_n \in A\right) - P\left(Z_{\lambda_n} \in A\right) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} \left| P\left(S_n = m\right) - P\left(Z_{\lambda_n} = m\right) \right|.$$

Trong hai năm liên tục, 1998 và 1999, Roos B. đã cho ra các kết quả đặc sắc sau (Roos B., 1998, Roos B., 1999):

$$d_{TV} \leq \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \left(\sum_{j=1}^{d} \sqrt{\min\left\{ \frac{1}{\lambda_n\left(j\right)}, 2e \right\} \sum_{k=1}^{n} p_{kj}^2} \right)^2,$$

$$d_{TV} \leq 8.8 \sum_{k=1}^{n} \min \left\{ \sum_{j=1}^{d} \frac{p_{kj}^2}{\lambda_n(j)}, \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right)^2 \right\}.$$

Cũng với phương pháp Stein-Chen, Barbour và Chen đã chứng minh được kết quả sau vào năm 2005, được đánh giá là cận sắc bén nhất trong các kết quả khảo sát (Barbour and Chen Louis, 2005):

$$d_{TV} \leq$$

$$2 \sum_{j,l=1}^{d} \min\left\{1, \sqrt{\frac{2}{e\lambda\mu_j}}\right\} \min\left\{1, \frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu_l - \lambda^2\left(l\right) - \tau_l}}\right\} \sum_{k=1}^{n} p_{kj} p_{kl},$$

trong đó

$$\lambda := \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right); \mu_j := \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{n} p_{kj}; \lambda^2\left(j\right) := \sum_{k=1}^{n} p_{kj}^2$$

và $\tau_j := \max_{1 \leq k \leq n} p_{kj}\left(1 - p_{kj}\right)$.

Ngoài ra, còn rất nhiều các kết quả cho các bài toán xấp xỉ Poisson nói chung và xấp xỉ Poisson trên không gian d-chiều nói riêng đã được các nhà toán học giải quyết, chẳng hạn như các kết quả có trong Deheuvels and Pfeifer (1988); Barbour *et al.* (1992); Chen and Röllin (2013); Tran Loc Hung and Le Truong Giang (2016a); Tran Loc Hung and Le Truong Giang (2016b).

Đa số các kết quả cho bài toán xấp xỉ Poisson trên không gian d-chiều chỉ dừng lại xem xét ở trường hợp tổng tất định (tổng của các vectơ ngẫu nhiên với chỉ số của tổng là xác định, ký hiệu S_n), rất ít các kết quả trong đó có xét đến tổng ngẫu nhiên (tổng các vectơ ngẫu nhiên với chỉ số của tổng là một biến ngẫu nhiên, ký hiệu S_{N_n}). Với kỹ thuật tương đối đơn giản, bằng cách sử dụng khoảng cách Trotter-Rényi, bài toán này cho cả hai trường hợp nói trên đã được giải quyết.

Bố cục bài viết được chia làm bốn mục. Mục thứ nhất dành cho việc giới thiệu tổng quan vấn đề nghiên cứu. Mục thứ hai trình bày phương pháp khoảng cách Trotter-Rényi để làm cơ sở cho việc chứng minh các kết quả chính ở mục thứ ba. Những kết luận của vấn đề nghiên cứu được trình bày ở mục cuối cùng của bài viết này.

2 PHƯƠNG PHÁP KHOẢNG CÁCH TROTTER-RÉNYI

Năm 1959, Trotter đã xây dựng một công cụ toán tử mới để chứng minh định lý giới hạn trung tâm, đó là toán tử Trotter. Năm 1970, Rényi đã áp dụng thành công toán tử Trotter cho bài toán xấp xỉ Poisson. Toán tử này còn được gọi là toán tử Trotter-Rényi và khoảng cách xác suất dựa trên toán tử đó được gọi là khoảng cách Trotter-Rényi (Tran Loc Hung and Le Truong Giang, 2014). Dựa trên định nghĩa của Rényi (1970), toán tử Trotter-Rényi trên không gian d-chiều được xác định như sau:

2.1 Định nghĩa 1: Một toán tử tuyến tính A_X liên kết với một vectơ ngẫu nhiên rời rạc d-chiều X thì được gọi là toán tử Trotter-Rényi trên không gian d-chiều, $d \geq 1$, được định nghĩa bởi ánh xạ $A_X : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, sao cho

$$\left(A_X f\right)\left(x\right) := E\left(f\left(X + x\right)\right)$$
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} f\left(x + m\right) P\left(X = m\right),$$
$$\forall f \in \mathbb{K}, \forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}_+^d,$$

trong đó $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}_+^d$; $\mathbb{K}$ là một lớp các hàm thực bị chặn được xác định trên $\mathbb{Z}_+^d$. Chuẩn của hàm $f \in \mathbb{K}$ được xác định

$$\| f \| = \sup_{x \in \mathbb{Z}_+^d} \left| f\left(x\right) \right|.$$

Theo đó, khoảng cách Trotter-Rényi của hai vectơ ngẫu nhiên X và Y trên không gian d-chiều được định nghĩa như sau:

2.2 Định nghĩa 2: Khoảng cách Trotter-Rényi của hai vectơ ngẫu nhiên d-chiều X và Y, ký hiệu $d_{TR}(X, Y; f)$, được xác định bởi:

$$d_{TR}(X, Y; f) := \| A_X f - A_Y f \|$$
$$= \sup_{x \in \mathbb{Z}_+^d} \left| Ef(X + x) - Ef(Y + x) \right|,$$

ở đây $f \in \mathbb{K}$.

Ta có thể dễ dàng kiểm tra các tính chất sau đây của khoảng cách Trotter-Rényi, kỹ thuật chứng minh chi tiết bạn đọc có thể tham khảo một trong các tài liệu Trotter (1959); Rényi (1970) và Tran Loc Hung (2009).

− Khoảng cách $d_{TR}(X, Y; f)$ là một khoảng cách xác suất.

− Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các vectơ ngẫu nhiên d-chiều và cho X là một vectơ ngẫu nhiên d-chiều. Với $f \in \mathbb{K}$, nếu $\lim_{n \to +\infty} d_{TR}(X_n, X; f) = 0$ thì $X_n \xrightarrow{d} X$ khi $n \to \infty$.

− Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là các vectơ ngẫu nhiên độc lập (theo mỗi nhóm). Khi đó, với mỗi $f \in \mathbb{K}$ ta có

$$d_{TR}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j, \sum_{j=1}^{n} Y_j; f\right) \leq \sum_{j=1}^{n} d_{TR}(X_j, Y_j; f). \quad (1.1)$$

− Giả sử hai dãy vectơ ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ độc lập theo từng nhóm. Cho $\{N_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên dương và độc lập với mọi vectơ ngẫu nhiên $X_n, Y_n, n \geq 1$. Khi đó, với mỗi $f \in \mathbb{K}$ ta có

$$d_{TR}\left(\sum_{j=1}^{N_n} X_j, \sum_{j=1}^{N_n} Y_j; f\right) \leq$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(N_n = k) \sum_{j=1}^{k} d_{TR}(X_j, Y_j; f).$$

Chú ý rằng khoảng cách Trotter-Rényi và khoảng cách biến phân toàn phần có quan hệ mật thiết với nhau. Nếu hàm f được chọn là hàm chỉ tiêu xác định trên tập $A \subset \mathbb{Z}_+^d$, ký hiệu $\chi_A(x)$, ta có

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in A, \\ 0 & \text{khi } x \notin A \end{cases} \text{ thì } \sup_{A \subset \mathbb{Z}_+^d} d_{TR}(X, Y, \chi_A) = d_{TV}.$$

3 CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

3.1 Bài toán xấp xỉ Poisson cho trường hợp tổng tất định

Với $k = 1, 2, ..., n$ cho A_{X_k} và A_{Z_k} là các toán tử Trotter–Rényi trên không gian d-chiều được xác định như trong mục 2. Ở đây Z_k là vectơ ngẫu nhiên Poisson d-chiều với vectơ trung bình $\left(p_{k1}, p_{k2}, ..., p_{kd}\right)$. Giả sử rằng Z_{λ_n} là vectơ ngẫu nhiên Poisson d-chiều với vectơ trung bình

$\lambda_n = \left(\lambda_n(1), \lambda_n(2), \ldots, \lambda_n(d)\right)$, trong đó

$$\lambda_n(j) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k(j)\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj},\ j = 1, 2, ..., d.$$

Rõ ràng ta có $Z_{\lambda_n} \overset{W}{=} \sum_{k=1}^{n} Z_k$, ở đây ký hiệu $\overset{W}{=}$ cho hai biến ngẫu nhiên cùng quy luật phân phối xác suất. Ta lưu ý rằng

$$P\left(Z_k = m\right) = \prod_{j=1}^{d} \left(e^{-p_{kj}} \frac{p_{kj}^{m_j}}{m_j!} \right),$$

$$m = \left(m_1, m_2, ..., m_d\right) \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Định lí 1 Cho $\left\{X_n, n \ge 1\right\}$ là dãy các vectơ ngẫu nhiên độc lập, nhận phân phối Bernoulli d-chiều trong

$\mathbb{R}^d, X_k = \left(X_k(1), X_k(2), \cdots, X_k(d)\right); k, d \in \mathbb{N},$

với xác suất

$P(X_k = e_j) = p_{kj} \in [0,1], k = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, d;$

$P(X_k = \Theta) = 1 - \sum_{j=1}^{d} p_{kj} \in [0,1].$

Khi đó, với mọi $f \in \mathbb{K}$ ta có

$$d_{TR}\left(S_n, Z_{\lambda_n}; f\right) \le 2\|f\| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right)^2,$$

trong đó $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Chứng minh.

Theo bất đẳng thức (1.1), ta có đánh giá sau:

$$d_{TR}\left(S_n, Z_{\lambda_n}; f\right) \le \sum_{k=1}^{n} d_{TR}\left(X_k, Z_k; f\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left\| A_{X_k} f - A_{Z_k} f \right\|.$$

Hơn nữa, với mọi $f \in \mathbb{K}$ và với mọi $x, m \in \mathbb{Z}_+^d$, ta có

$$A_{X_k} f(x) - A_{Z_k} f(x)$$
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} f\left(x + m\right)\left[P\left(X_k = m\right) - P\left(Z_k = m\right)\right]$$
$$= f\left(x + \Theta\right)\left[P\left(X_k = \Theta\right) - P\left(Z_k = \Theta\right)\right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{d} f\left(x + e_j\right)\left[P\left(X_k = e_j\right) - P\left(Z_k = e_j\right)\right]$$
$$- \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \left\{\Theta, e_1, e_2, ..., e_d\right\}} f\left(x + m\right) P\left(Z_k = m\right).$$

Do đó,

$$\left| A_{X_k} f\left(x\right) - A_{Z_k} f\left(x\right) \right|$$
$$\le \|f\| \left[\left| 1 - \sum_{j=1}^{d} p_{kj} - e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} \right| + \sum_{j=1}^{d} \left| p_{kj} - p_{kj} e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} \right| \right]$$
$$+ \|f\| \left[1 - e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} - \sum_{j=1}^{d} p_{kj} e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} \right]$$
$$= \|f\| \left[e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} - 1 + \sum_{j=1}^{d} p_{kj} + \sum_{j=1}^{d} p_{kj} - \sum_{j=1}^{d} p_{kj} e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} \right]$$
$$+ \|f\| \left[1 - e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} - \sum_{j=1}^{d} p_{kj} e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} \right]$$
$$= 2\|f\| \sum_{j=1}^{d} p_{kj} \left(1 - e^{-\sum_{j=1}^{d} p_{kj}} \right) \le 2\|f\| \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right)^2.$$

Ta suy ra

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}_+^d} \left| A_{X_k} f\left(x\right) - A_{Z_\lambda} f\left(x\right) \right| \le 2\|f\| \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right)^2.$$

Như vậy, với mọi $f \in \mathbb{K}$,

$$d_{TR}\left(S_n, Z_{\lambda_n}; f\right) \le 2\|f\| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj} \right)^2.$$

Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 1 *Dựa trên các giả thiết của định lý 3.1, khi $d=1$ chúng ta có kết quả của bài toán xấp xỉ Poisson trong trường hợp 1-chiều:*

$$d_{TR}\left(S_n, Z_{\lambda_n}; f\right) \le 2\|f\| \sum_{k=1}^{n} p_k^2.$$

Nhận xét 1 Hệ quả 3.1 đã được chứng minh trong Tran Loc Hung and Vu Thi Thao (2013), Định lý 3.1 trang 5.

Không dừng lại ở tổng tất định $\left(S_n\right)$, trong mục tiếp theo bài toán xấp xỉ Poisson trên không gian d-chiều khi mà chỉ số của tổng là một biến ngẫu nhiên $\left(S_{N_n}\right)$ sẽ được nghiên cứu.

3.2 Bài toán xấp xỉ Poisson cho trường hợp tổng ngẫu nhiên

Cho $\{N_n, n \ge 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương và độc lập với mỗi $X_k, k \ge 1$ và $Z_k, k \ge 1$. Giả sử rằng $Z_{\lambda_{N_n}}$ là vectơ ngẫu nhiên Poisson d-chiều với vectơ trung bình

$$\lambda_{N_n} = \left(\lambda_{N_n}(1); \lambda_{N_n}(2); \ldots; \lambda_{N_n}(d)\right)$$

và

$$\lambda_{N_n}(j) = E\left(\sum_{k=1}^{N_n} X_{jk}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(N_n = n\right) \sum_{k=1}^{n} p_{kj}, j = 1, 2, \ldots, d.$$

Định lí 2 *Cho $\left\{X_n, n \ge 1\right\}$ là dãy các vectơ ngẫu nhiên độc lập, nhận phân phối Bernoulli d-chiều trong*

$$\mathbb{R}^d, X_k = \left(X_k(1), X_k(2), \cdots, X_k(d)\right), k, d \in \mathbb{N},$$

với xác suất

$$P(X_k = e_j) = p_{kj} \in [0,1], k = 1, 2, \ldots, N_n; j = 1, 2, \ldots, d;$$

$$P(X_k = \Theta) = 1 - \sum_{j=1}^{d} p_{kj} \in [0,1].$$

Khi đó, với mọi $f \in \mathbb{K}$ thì

$$d_{TR}\left(S_{N_n}, Z_{\lambda_{N_n}}; f\right) \le 2\|f\| E\left[\sum_{k=1}^{N_n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj}\right)^2\right],$$

trong đó $S_{N_n} = \sum_{k=1}^{N_n} X_k$ và $Z_{\lambda_{N_n}}$ là vectơ ngẫu nhiên Poisson d-chiều với vectơ trung bình λ_{N_n}.

Chứng minh.

Với mọi $f \in \mathbb{K}$ và $x \in \mathbb{Z}_+^d$, ta có

$$d_{TR}\left(S_{N_n}, Z_{\lambda_{N_n}}; f\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(N_n = n\right) d_{TR}\left(S_n, Z_{\lambda_n}; f\right)$$

Khi đó theo định lý 3.1, ta suy ra

$$d_{TR}\left(S_{N_n}, Z_{\lambda_{N_n}}; f\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P\left(N_n = n\right) 2\|f\| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj}\right)^2$$

$$= 2\|f\| \sum_{n=1}^{\infty} P\left(N_n = n\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj}\right)^2$$

$$= 2\|f\| E\left[\sum_{k=1}^{N_n} \left(\sum_{j=1}^{d} p_{kj}\right)^2\right].$$

Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 2 *Dựa trên các giả thiết của định lý 3.2, khi $d=1$ chúng ta có kết quả của bài toán xấp xỉ Poisson trong trường hợp 1-chiều:*

$$d_{TR}\left(S_{N_n}, Z_{\lambda_{N_n}}; f\right) \le 2\|f\| E\left(\sum_{k=1}^{N_n} p_k^2\right).$$

Nhận xét 2 Hệ quả 3.2 đã được chứng minh bởi Tran Loc Hung and Vu Thi Thao (2013), Định lý 4.1 trang 8.

4 KẾT LUẬN

Với kỹ thuật chứng minh tương đối đơn giản, bài toán xấp xỉ Poisson trên không gian d-chiều trong đã được giải quyết trong cả hai trường hợp chỉ số của tổng là tất định và ngẫu nhiên. So với phương pháp Stein-Chen thì khoảng cách Trotter-Rényi có ưu thế hơn trong việc giải quyết các bài toán xấp xỉ trong xác suất liên quan đến tổng ngẫu nhiên (các kết quả có được từ phương pháp Stein-Chen của McDonald (1980); Barbour (1988); Roos (1998); Roos (1999) và Barbour and Chen Louis (2005) chỉ xét cho trường hợp tổng tất định). Các kết quả thu được trong bài viết này (Định lý 1, 2) còn là sự tổng quát hóa các kết quả trong Tran Loc Hung and Vu Thi Thao (2013) khi xét cho trường hợp 1-chiều. Hướng phát triển của vấn đề nghiên cứu là sử dụng khoảng cách Trotter-Rényi cho các bài toán xấp xỉ hình học, xấp xỉ nhị thức âm và các bài toán xấp xỉ khác trong xác suất trên không gian nhiều chiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Barbour A. D., 1988. Stein's method and Poisson process convergence. J. Appl. Probab. 25(A): 175-184.

Barbour A. D., Holst L. and Janson S., 1992. Poisson Approximation. Oxford Studies in Probability, 2. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, x+277.

Barbour A. D. and Chen Louis. H. Y., 2005. Stein's method and Applications. Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, Vol. 5.

Chen L. H., 1975. Poisson approximation for dependent trials. Annals of Probabability, 3(3): 534-545.

Chen Louis. H. Y. and Röllin A., 2013. Approximating dependent rare events. Bernoulli1 9 (4): 12431267.

Deheuvels P. and Pfeifer D., 1988. Poisson approximation of multinomial distributions and point processes. Journal of Multivariate Analysis, 25(1): 65-89.

McDonald D. R., 1980. On the Poisson approximation to the multinomial distribution. The Canadian Journal of Statistics, 8(1): 115-118.

Minkova L. D., 2010. Insurance Risk Theory. Lecture Notes, *TEMPUS Project SEE doctoral studies in mathematical sciences.*

Nguyễn Duy Tiến, 2000. Các mô hình xác suất và ứng dụng, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 172.

Nguyễn Duy Tiến và Vũ Viết Yên, 2000. Lý thuyết xác suất. Nhà xuất bản Giáo dục, 395.

Rényi A., 1970. Probability theory. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 10. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, iii + 666.

Roos B., 1998. Metric multivariate Poisson approximation of the generalized multinomial distribution. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 43(1): 404-413.

Roos B., 1999. On the rate of multivariate Poisson convergence. Journal of Multivariate Analysis 69(1) 120-134.

Stein C. M., 1972. A bound for the error in normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In: Proc. Sixth Berkeley Symposium Math. Statistic Prob ab, 3(1) 583-602.

Tran Loc Hung, 2009. Estimations of the Trotter's distance of two weighted random sums of d-dimensional independent random variables. International Mathematical Forum, 4, 22, 1079-1089.

Tran Loc Hung, and Vu Thi Thao, 2013. Bounds for the Approximation of Poisson-binomial distribution by Poisson distribution. Journal of Inequalities and Applications, 2013(1): 30.

Tran Loc Hung, and Le Truong Giang, 2014. On bounds in Poisson approximation for integer-valued independent random variables. Journal of Inequalities and Applications, 2014(1): 291.

Tran Loc Hung, and Le Truong Giang, 2016a. On bounds in Poisson approximation for distributions of independent negative-binomial distributed random variables. SpringerPlus,5(1):79.

Tran Loc Hung, and Le Truong Giang, 2016b. On the bounds in Poisson approximation for independent geometric distributed random variables. Bulletin of the Irannian Mathematical Society, 42(5): 1087-1096.

Trotter H. F., 1959. An elementary proof of the central limit theorem. Arch. Math (Basel), 10(1): 226-234.