TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN CỦA DÒNG

Phạm Thị Thu Hường[1]

ABSTRACT

Let Ω be a domain in $\mathbb{C}^n$, $u \in PSH(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc(\Omega)}$ and T be a closed positive (1,1) bidimentional current on Ω. Then, $dd^c u \wedge T$ is a positive measure on Ω. We establish intergration by parts for currents because of its classical meaning and moreover, the appeareance of Monge - Ampère operator have an important role in a lot of issues of pluripotential theory. The basic for the definition of Monge - Ampère operator base on the estimation of Chern, Levin and Nirenberg combined with the integration by parts for currents to make this definition by using unductive method.

We fix some wrong in the Article [9] and then use these results to extend integration by parts for unbounded plurisubharminic functions, $\mathcal{E}_0$ and $\mathcal{F}$.

Keywords: positive current, Integration by parts for currents, unbounded plurisubharmonic functions, Monge - Ampère operator

Title: Integration by parts for currents

TÓM TẮT

Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền, $u \in PSH(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc(\Omega)}$ và T là một dòng đóng song chiều $(1,1)$ trên Ω. Khi đó, $dd^c u \wedge T$ là một độ đo dương trên Ω. Ta xây dựng công thức tích phân từng phần trên dòng với ý nghĩa cổ điển vốn có của nó là dùng để tính tích phân của những hàm phức tạp bằng những hàm đơn giản hơn. Hơn nữa, ta biết sự ra đời của toán tử Monge-Ampère phức có vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu nhiều vấn đề của lý thuyết đa thế vị phức. Nền tảng cho định nghĩa của toán tử Monge-Ampère phức dựa trên ước lượng của Chern, Levin và Nirenberg kết hợp với công thức tích phân từng phần để đi đến định nghĩa theo quy nạp toán tử này. Do vậy, việc xây dựng công thức tích phân từng phần trên dòng cho những hàm đa điều hòa dưới bị chặn và mở rộng hơn nữa cho những hàm đa điều hòa dưới không bị chặn là công việc có ý nghĩa.

Chúng tôi có chỉnh sửa chứng minh trong bài báo $[9]$ và dùng những kết quả đã có trong bài báo để mở rộng công thức tích phân từng phần cho những hàm đa điều hòa dưới không bị chặn và xây dựng công thức tích phân từng phần trên lớp $\mathcal{E}_0$ và $\mathcal{F}$.

Từ khoá: tích phân từng phần trên dòng, dòng dương, hàm đa điều hoà dưới không bị chặn

1 CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ KẾT QUẢ LIÊN QUAN

Định nghĩa 1.1: Định nghĩa các lớp hàm $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_p$, $\mathcal{F}_p$.

Cho Ω là tập mở, bị chặn, liên thông và siêu lồi trong $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. Kí hiệu: $\mathcal{E}_0(\Omega) = \{ \varphi \in PSH^-(\Omega), \varphi$ bị chặn, $\lim\limits_{z \to \xi} \varphi(z) = 0,\ \forall \xi \in \partial\Omega$ và $\int\limits_{\Omega} (dd^c \varphi)^n < +\infty \}$.

---

[1] Trường Đại Học An Giang

Cho $u \in PSH^-(\Omega)$, ta nói $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ nếu với mỗi $z_0 \in \Omega$ tồn tại lân cận U_{z_0} của z_0 trong Ω và một dãy giảm $h_j \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho $h_j \searrow u$ trên U_{z_0} và $sup_j \int_\Omega (dd^c h_j)^n < +\infty$.

Một hàm $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ khi và chỉ khi $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ và tồn tại một dãy giảm $u_j \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho $u_j \searrow u$ trên Ω và $sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < +\infty$.

Với $p \geq 1$, lớp $\mathcal{E}_p$ là tập hợp các hàm $\varphi \in PSH(\Omega)$ sao cho tồn tại

$$\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega):\ \varphi_j \searrow \varphi,\ j \to \infty \text{ và } sup_j \int_\Omega (-\varphi_j)^p (dd^c \varphi_j)^n < +\infty.$$

Với $p \geq 0$, lớp $\mathcal{F}_p$ là tập hợp các hàm $\varphi \in PSH(\Omega)$ sao cho tồn tại

$$\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega):\ \varphi_j \searrow \varphi,\ j \to \infty \text{ và } sup_j \int_\Omega (dd^c \varphi_j)^n < +\infty.$$

Định lí 1.2: Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và T là dòng dương đóng song bậc $(n-1,n-1)$ trên Ω. Giả sử u và v là các hàm đa điều hòa dưới âm bị chặn địa phương trên Ω sao cho $u = v$ ngoài một tập compact của Ω. Khi đó:

$$\int_\Omega v dd^c u \wedge T = \int_\Omega u dd^c v \wedge T. \qquad (1)$$

Chứng minh

+ Giả sử u, v, T được xác định trên một lân cận của $\overline{\Omega}$, v lớp C^∞, âm trên Ω và $u = v$ trong lân cận của $\partial\Omega$. Giả sử K là tập compact của Ω sao cho $\{z \in \Omega : u(z) \neq v(z)\} \subset\subset \operatorname{int} K$. Giả sử $\phi \in C_0^\infty$, $0 \leq \phi \leq 1$ trên Ω và $\phi \equiv 1$ trên K. Khi đó:

$$\int_\Omega \phi dd^c u \wedge T = \int_\Omega uT \wedge dd^c(\phi v) = \int_\Omega uT \wedge \left(dd^c(\phi v) - \phi dd^c v\right) + \int_\Omega uT \wedge \phi dd^c v.$$

Nhưng: $dd^c(\phi v) - \phi dd^c v = d\left(v d^c\phi + \phi d^c v\right) - \phi dd^c v.$

$$= dv \wedge d^c\phi + v dd^c\phi + d\phi \wedge d^c v + \phi dd^c v - \phi dd^c v$$

$$= v dd^c\phi - d^c\phi \wedge dv + d\phi \wedge v.$$

Là dạng trơn song bậc $(1,1)$ có giá nằm trong tập mở mà trên đó $u = v$. Do đó:

$$\int_\Omega uT \wedge \left(dd^c(\phi v) - \phi dd^c v\right) = \int_\Omega vT \wedge dd^c(\phi v) - \int_\Omega vT \wedge \phi dd^c v$$

$$= \int_\Omega \phi v dd^c v \wedge T - \int_\Omega \phi vT \wedge dd^c v = 0.$$

Do v là hàm trơn nên $dd^c v \wedge T = T \wedge dd^c v$. Vậy:

$$\int_\Omega \phi v dd^c u \wedge T = \int_\Omega uT \wedge \phi dd^c v = \int_\Omega \phi uT \wedge dd^c v = \int_\Omega \phi u dd^c v \wedge T.$$

Vậy, ta nhận được đẳng thức $(1,1)$, vì ta có thể cho $sup\phi$ tăng tới Ω, còn $v dd^c u \wedge T$ và $u dd^c v \wedge T$ là các độ đo Borel chính quy âm trên Ω.

+ Xét định lí cho trường hợp tổng quát.

Giả sử L là tập compact của Ω sao cho $u = v$ trên $\Omega \setminus L$ và chọn $\gamma > 0$ sao cho $L_{2\gamma} = \{z \in \Omega : dist(z, L) \leq 2\} \subset \Omega$.

Với $\varepsilon > 0, u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon, v_\varepsilon = v * \chi_\varepsilon \to u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Do $u = v$ ngoài L nên với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có $u_\varepsilon = v_\varepsilon$ ngoài L_γ.

Chọn δ_0 đủ nhỏ sao cho $L_{2\gamma} \subset \Omega_{\delta_0} = \{z \in \Omega : dist(z, \partial\Omega) > \delta_0\}$.

Với $\delta < \delta_0 \left(\Omega_{\delta_0} \subset \Omega_\delta\right)$ và $\Omega_\delta \subset\subset \Omega$. Nên $\max\left\{v(z) : z \in \overline{\Omega_\delta}\right\} < 0$. Do $v_\varepsilon \searrow v$ khi $\varepsilon \searrow 0$ nên $v_\varepsilon \le 0$ trên $\overline{\Omega_\varepsilon}$ nếu ε đủ bé.

Giả sử $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ với $\phi = 1$ trên $L_{2\gamma}$. Theo kết quả ở trên ta có:

$$\int_{\Omega_\delta} \phi v_\varepsilon dd^c u_\varepsilon \wedge T = \int_{\Omega_\delta} \phi u_\varepsilon dd^c v_\varepsilon \wedge T.$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$ và do $v_\varepsilon dd^c u_\varepsilon \wedge T$ hội tụ yếu tới $vdd^c u \wedge T$, $u_\varepsilon dd^c v_\varepsilon \wedge T$ hội tụ yếu tới $udd^c v \wedge T$ ta có:

$$\int_{\Omega_\delta} \phi v dd^c u \wedge T = \int_{\Omega_\delta} \phi u dd^c v \wedge T.$$

Từ đó:

$$\int_{\Omega_\delta} v dd^c u \wedge T = \int_{\Omega_\delta} u dd^c v \wedge T.$$

Lại cho $\delta \searrow 0$ và áp dụng định lí hội tụ đơn điệu ta được:

$$\int_{\Omega} v dd^c u \wedge T = \int_{\Omega} u dd^c v \wedge T.$$

Hệ quả 1.3: Giả sử $\Omega \in \mathbb{C}^n$ là miền bị chặn và T là dòng dương đóng song bậc $(n-1, n-1)$ trên lân cận Ω' của $\overline{\Omega}$. Giả sử u, v là các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương trên Ω', $u = v$ ngoài Ω và $u, v \le 0$ trên Ω. Khi đó:

$$\int_{\overline{\Omega}} v dd^c u \wedge T = \int_{\overline{\Omega}} u dd^c v \wedge T.$$

Định lí 1.4: Giả sử Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và v là một đa điều hòa dưới âm bị chặn địa phương vét cạn đối với Ω. Giả sử T là dòng đóng song bậc $(n-1, n-1)$ được xác định trên Ω và u là hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương trên Ω sao cho $u(z) \le 0, \forall z \in \Omega.$ Giả sử một trong các công thức sau đúng: $\int_\Omega dd^c v \wedge \mathrm{T} < \infty$ hay $\int_\Omega dd^c u \wedge \mathrm{T} < \infty$ và v liên tục.

Khi đó:

$$\int_\Omega v dd^c u \wedge \mathrm{T} < \infty \ge \int_\Omega u dd^c v \wedge \mathrm{T}.$$

Dấu "=" xảy ra nếu u, v là các hàm đa đều hòa vét cạn, bị chặn địa phương, âm và một trong các điều kiện sau đúng: $\int_\Omega dd^c v \wedge \mathrm{T} < +\infty$ và $\int_\Omega dd^c u \wedge \mathrm{T} < +\infty$ hay $\int_\Omega dd^c v \wedge \mathrm{T} < +\infty$ và v là liên tục.

Hệ quả 1.5: Cho Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử u và v là các hàm lớp $\mathcal{E}_0(\Omega)$. Khi đó công thức tích phân từng phần sau đúng:

$$\int_\Omega v(dd^c u)^n = \int_\Omega u dd^c v \wedge \left(dd^c u\right)^{n-1} \qquad (2)$$

Hay tổng quát hơn nếu $u_1,...,u_n$ là các hàm lớp $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Khi đó:

$$\int_\Omega v dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_n = \int_\Omega u_1 dd^c v \wedge dd^c u_2 \cdots \wedge dd^c u_n. \quad (3)$$

Định lí 1.6: Cho Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và thuộc lớp $\mathcal{F}(\Omega)$. Khi đó:

$$\int_\Omega v dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_n = \int_\Omega u_1 dd^c v \wedge dd^c u_2 \cdots \wedge dd^c u_n. \quad (4)$$

Để chứng minh định lí này ta cần ta cần kết quả hội tụ sau của Cegrell.

Mệnh đề 1.7: Cho Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử $u^p \in \mathcal{F}(\Omega), 1 \le p \le n$ và $h \in PSH^-(\Omega)$. Nếu $g_j^p \in \mathcal{E}_0(\Omega), g_j^p \searrow u^p$ khi $j \to \infty$ như trong định nghĩa của Ω thì:

$$\lim_{x\to\infty} \int_\Omega h dd^c g_j^p \wedge \cdots \wedge dd^c g_j^p = \int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \cdots \wedge dd^c u^n.$$

2 CÔNG THỨC TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN TRÊN $\mathcal{E}_0$ VÀ $\mathcal{F}$

Định lí 2.1: Cho Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử u và v là các hàm lớp $\mathcal{E}_0(\Omega)$. Khi đó công thức tích phân từng phần sau đúng:

$$\int_\Omega v(dd^c u)^n = \int_\Omega u dd^c v \wedge \left(dd^c u\right)^{n-1} \quad (5)$$

Hay tổng quát hơn nếu $u_1,...,u_n$ là các hàm lớp $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Khi đó:

$$\int_\Omega v dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_n = \int_\Omega u_1 dd^c v \wedge dd^c u_2 \cdots \wedge dd^c u_n. \quad (6)$$

Chứng minh:

Thật vậy, do $u, v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ nên $\int_\Omega \left(dd^c v\right)^n < \infty, \int_\Omega \left(dd^c v\right)^n < \infty$. Theo 2.4 ta có (5)

Nếu $v, u_1, ..., u_n \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ thì theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\int_\Omega dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_n \le (\int_\Omega dd^c \left(u_1\right)^n)^{\frac{1}{n}} ... (\int_\Omega dd^c \left(u_n\right)^n)^{\frac{1}{n}}) < \infty$$

Theo định lí 2.4 ta có (6).

Định lí 2.2: Cho Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $v, u_1, ..., u_n \in \mathcal{F}(\Omega)$. Khi đó:

$$\int_\Omega v dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_n = \int_\Omega u_1 dd^c v \wedge dd^c u_2 \cdots \wedge dd^c u_n. \quad (7)$$

Để chứng minh định lí này ta cần kết quả hội tụ sau của Cegrell.

Mệnh đề 2.3: Cho Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử $u^p \in \mathcal{F}(\Omega), 1 \le p \le n$ và $h \in PSH^-(\Omega)$. Nếu $g_j^p \in \varepsilon_0(\Omega), g_j^p \searrow u^p$ khi $j \to \infty$ như trong định nghĩa của Ω thì:

$$\lim_{x\to\infty} \int_\Omega h dd^c g_j^p \wedge \cdots \wedge dd^c g_j^p = \int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \cdots \wedge dd^c u^n.$$

Chứng minh:

Do Ω mở và $u^p \in \mathcal{F}(\Omega), 1 \le p \le n$ nên từ chứng minh của định lí 4.2 trong [Ceg] ta có: $dd^c g_j^1 \wedge \cdots \wedge dd^c g_j^n$ hội tụ yếu tới $dd^c u^1 \wedge \cdots \wedge dd^c u^n$. Mặt khác, từ bất đẳng thức Holder ta có:

$$\int_\Omega dd^c g_j^1 \wedge \cdots \wedge dd^c g_j^n \le \left(\int_\Omega (dd^c g_j^{\,1})^n\right)^{\frac{1}{n}} \ldots \left(\int_\Omega (dd^c g_j^{\,n})^n\right)^{\frac{1}{n}} < \infty, \forall j$$

Do đó: $\int_\Omega dd^c u^1 \wedge \cdots \wedge dd^c u^n \le \lim_{j\to\infty} \int_\Omega dd^c g_j^1 \wedge \cdots \wedge dd^c g_j^n < \infty$.

Mặt khác nếu $h \in \mathcal{E}_0(\Omega) \cap C(\Omega)$ thì töø chöùng minh cuûa ñònh lyù 4.2 trong $[\mathrm{Ceg}]$ ta coù

$$\int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega h dd^c g^1{}_j \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_j.$$

+) Giả sử $h \in PHS^-(\Omega)$ sao cho $\int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n > -\infty$.

Do $h \in PHS^-(\Omega)$ nên theo định lí 2.1 trong [Ceg], h là giới hạn của dãy hàm lớp $\varepsilon_0(\Omega) \cap C(\Omega)$. Vì thế, ta có thể chọn $h_j \in \varepsilon_0(\Omega) \cap C(\Omega)$ sao cho:

$$\left| \int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n - \int_\Omega h_j dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n \right| < \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n - \int_\Omega h_j dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n > -\frac{1}{j} .$$

$$\Rightarrow \int_\Omega -h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n < \frac{1}{j} - \int_\Omega h_j dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n.$$

Dùng kết quả trên ta chọn q_j sao cho:

$$\left| \int_\Omega h_j dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n - \int_\Omega h_j dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} \right| < \frac{1}{j}.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{j} + \int_\Omega h_j dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} < \int_\Omega h_j dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{j} - \int_\Omega h_j dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} \ge \frac{1}{j} - \int_\Omega h_j dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n.$$

Vậy:

$$\int_\Omega -h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n \le \frac{2}{j} - \int_\Omega h_j dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j}. \qquad (8)$$

Do $\quad h_j \ge h \Rightarrow \int_\Omega -h_j dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} \le \int_\Omega -h dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j}.$

Ta có:

$$\int_\Omega -h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n \le \frac{2}{j} - \int_\Omega h dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j}. \qquad (9)$$

Ta lại chọn s_j sao cho:

$$\left| \int_\Omega h_{s_j} dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} - \int_\Omega h dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j}. \right|$$

$$\Rightarrow \frac{2}{j} - \int_\Omega h dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} \le \frac{4}{j} - \int_\Omega h_{s_j} dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j}.$$

Ta có:

$$\int_\Omega -h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n \le \frac{4}{j} - \int_\Omega h_{s_j} dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j}. \qquad (10)$$

Tuy nhiên theo chứng minh của định lý 4.2 của [Ceg] thì:

$$\int_\Omega h_{s_j} dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} \ge \int_\Omega h_{s_j} dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n.$$

Vậy ta có:

$$\int_\Omega -h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n \le \frac{4}{j} - \int_\Omega h_{s_j} dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n.$$

Nhưng $h_{s_j} \ge h$ nên:

$$\int_\Omega -h_{s_j} dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n \le \int_\Omega -h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n.$$

Kết hợp lại ta được:

$$\int_\Omega -h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n \le \frac{2}{j} - \int_\Omega h dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j}.$$

$$\le \frac{4}{j} - \int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n.$$

Do đó:

$$-\frac{2}{j} \le \int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n - \int_\Omega h dd^c g^1{}_{q_j} \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_{q_j} \le \frac{2}{j} .$$

Vậy:

$$\int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega h dd^c g^1{}_j \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_j.$$

+) Nếu $\int_\Omega h dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n = -\infty$ thì $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega h dd^c g^1{}_j \wedge \ldots \wedge dd^c g^n{}_j = -\infty$.

Thật vậy, chọn $h_j \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$, $h_j \searrow h$. Khi đó:

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega h_j dd^c u^1 \wedge \ldots \wedge dd^c u^n = -\infty .$$

Do đó với $\forall M > 0, \exists j_0\ \forall j \ge j_0$:

$$\int_\Omega h_j \mathrm{dd}^c u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd}^c u^n < -M$$

Đặt biệt $\int_\Omega h_{j_0} \mathrm{dd}^c u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd}^c u^n < -M$

Nhưng :

$$\int_\Omega h_j \mathrm{dd}^c u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd}^c u^n = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega h_{j_0} \mathrm{dd}^c g_k^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd}^c g_k^n .$$

Vậy $\exists k_0$ sao cho $\forall k \ge k_0$:

$$\int_\Omega h_{j_0} \mathrm{dd}^c g_k^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd}^c g_k^n \prec -M$$

Nhưng $\forall h_{j_0} \ge h$. Vậy: $\int_\Omega h \mathrm{dd}^c g_k^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd}^c g_k^n \prec -M, \forall k \ge k_0$

Do đó:

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega h_{j_0}\mathrm{dd}^c g_k^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{dd}^c g_k^n=-\infty$$

Chứng minh định lí 2.2

Lấy các dãy $\{v_{m_1}\}\in\varepsilon_0(\Omega)$ sao cho $v_{m_1}\searrow v$ khi $m_1\to\infty,\{g_{j_i}^i\}\in\varepsilon_0(\Omega),g_{j_i}^i\searrow u_i,1\le i\le n$ khi $j_i\to\infty$ .Do định lí 3.1 ta có:

$$\int_\Omega v_{m_1}\mathrm{dd}^c g_{j_1}^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{dd}^c g_{j_n}^n=\int_\Omega g_{j_1}^1\mathrm{dd}^c v_{m_1}\wedge\mathrm{dd}^c g_{j_2}^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{dd}^c g_{j_n}^n$$

Cho $j_2\to\infty,\ldots,j_n\to\infty,$ áp dụng mệnh đề 2.7 ta được:

$$\int_\Omega v_{m_1}\mathrm{dd}^c g_{j_1}^1\wedge\mathrm{dd}^c u_2\ldots\wedge\mathrm{dd}^c u_n=\int_\Omega g_{j_1}^1\mathrm{dd}^c v_{m_1}\wedge\mathrm{dd}^c u^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{dd}^c u^n$$

Cho $j_2\to\infty$, áp dụng mệnh đề 2.7 cho vế trái, dùng định lý hội tụ đơn điệu cho vế phải ta được:

$$\int_\Omega v_{m_1}\mathrm{dd}^c u_1\wedge\mathrm{dd}^c u_2\ldots\wedge\mathrm{dd}^c u_n=\int_\Omega u_1\mathrm{dd}^c v_{m_1}\wedge\mathrm{dd}^c u^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{dd}^c u^n$$

Cuối cùng cho $m_1\to\infty$ ta được:

$$\int_\Omega v\mathrm{dd}^c u_1\wedge\mathrm{dd}^c u_2\ldots\wedge\mathrm{dd}^c u_n=\int_\Omega u_1\mathrm{dd}^c v\wedge\mathrm{dd}^c u^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{dd}^c u^n\ .$$

Chú ý 2.4: Công thức tích phân từng phần không đúng cho lớp $\mathcal{E}(\Omega)$.

Thật vậy, lấy $\Omega=B(0,1)$ là hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}_n$, $u=-1$ là hàm thuộc lớp $\mathcal{E}(\Omega)$, $v=|z|^2-1\in\varepsilon(\Omega)$. Khi đó $\mathrm{dd}^c v=4\beta_n,\beta_n=\sum_{j=1}^n\frac{i}{2}dz_j\wedge\overline{dz_j}$

Từ đó $\left(\mathrm{dd}^c\right)^n=4^n n!d\lambda_{2n},d\lambda_{2n}$ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{C}_n$.

Ta thấy công thức: $\int_\Omega v\mathrm{dd}^c u\wedge\left(\mathrm{dd}^c v\right)^{n-1}=\int_\Omega u\left(\mathrm{dd}^c v\right)^n$ không đúng

vì vế trái bằng không. Trong khi đó vế phải = $-\int_\Omega 4^n n!d\lambda_{2n}=-4^n.n!\lambda_{2n}\left(B(0,1)\right)<0$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Khuê - Bùi Đắc Tắc - Đỗ Đức Thái, cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm tập I, Nhà xuất bản giáo dục 2001.
2. Nguyễn Văn Khuê - Lê mậu hải, cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm tập II, nhà xuất bản giáo 2001.
3. Nguyễn Văn Khuê - Lê mậu hải, Phép tính vi phân – dạng vi phân trong không gian Banach, Nhà xuất bản Đại học sư phạm Hà Nội 2004.
4. Đỗ Đức Thái, cơ sở lý thuyết hình học, Nhà xuất bản Đại học sư phạm 2003.
5. E. Bedford, B. A Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, acta math.149(1982), 1-40.
6. Z. Blocki, The complex Monge - Ampere operator in pluripotential theory, Preprint of Book.
7. U. Cegrell, The general definition of the complex Monge - Ampere operator, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54(2004). 159-179.
8. U.Cegrell, Pluricomplex energy, Acta Math. 180(1998), 187-217.
9. D. Coman, Integration by parts for currents anf applications on relative the capacity and Lelong numbers, Mathamatica, Tome 39(62). $N^0 1, 1997, pp. 45-57$.
10. M.Klimek, Pluripotential theory, Clarendon press, Oxford,1991.
11. T.Ransford, Potential theory in the complex plane, Cambridge University Press, 1995.