THAY ĐỔI PHẠM VI TRONG GIẢI TOÁN: MỘT KHẢO SÁT ĐỐI VỚI HỌC SINH DỰ BỊ ĐẠI HỌC

Bùi Anh Tuấn[1]

ABSTRACT

Changing the cadres of a mathematical problem plays the important role in solving problems of mathematics. There exists the question: Are changing the cadres used as a technique in solving problems of mathematics by high school students in Mekong Delta? For answering this question, in the following article, we conducted the survey at the School of Pre-university, Can Tho University.

Keywords: Cadre, register, changing the cadres of a mathematical problem

Title: High school students in Mekong Delta with changing the cadres of a mathematical problem

TÓM TẮT

Thay đổi phạm vi bài toán có vai trò quan trọng trong giải toán. Vấn đề đặt ra là: Việc thay đổi phạm vi có được học sinh ở các trường Trung học phổ thông (THPT) tại đồng bằng sông Cửu Long (ĐBSCL) sử dụng như một kỹ thuật giải toán hay không? Bài viết này nhằm trả lời câu hỏi trên thông qua việc tiến hành một khảo sát tại Khoa Dự bị, Trường Đại học Cần Thơ.

Từ khóa: Phạm vi, ngôn ngữ biểu thị, thay đổi phạm vi bài toán

1 VẤN ĐỀ ĐẶT RA

Trong môn toán ở nhà trường THPT, một đối tượng toán học thường được diễn đạt dưới nhiều "*ngôn ngữ biểu thị*" (register) của những "*phạm vi*" (cadre) khác nhau. Chẳng hạn, ở phạm vi Hình học Euclid, *đường thẳng* được biểu thị dưới dạng hình ảnh (*ngôn ngữ hình vẽ*); còn trong phạm vi Hình học giải tích, đường thẳng được gắn với hệ thức $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 > 0$), một hình thức của *ngôn ngữ ký hiệu*.

Thông thường, các đối tượng của một bài toán được biểu thị dưới một ngôn ngữ và phạm vi nhất định nào đó. Tuy nhiên, việc giải bài toán, đôi khi lại khó thực hiện trong phạm vi ban đầu, nhưng lại dễ dàng thực hiện khi chuyển bài toán sang phạm vi mới. Ý tưởng "*thay đổi phạm vi*" (changement de cadres) này đã được R. Douady, một nhà toán học người Pháp, đề cập đến năm 1986:

"Thay đổi phạm vi là một cách làm để nhận được những hình thức trình bày khác – không nhất thiết phải tương đương với nhau – cho một bài toán. Các hình thức trình bày mới này cho phép vượt qua khó khăn đã gặp khi giải bài toán và vận dụng những công cụ, những kỹ thuật mà cách trình bày ban đầu không gợi ra. Đối với nhà nghiên cứu, thay đổi phạm vi nhằm mục đích tạo niềm tin về phỏng đoán và khơi thông ra kế hoạch chứng minh. Một kế hoạch chứng minh không phải bao giờ cũng hoàn hảo ngay từ đầu. Có lúc nó đi đến những phản ví dụ, dẫn đến chỗ bế

---

[1] Bộ môn Sư phạm Toán học, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

tắc,… thậm chí phải loại bỏ phỏng đoán ban đầu. Dù thế nào đi chăng nữa, việc dịch từ phạm vi này sang phạm vi khác thường đạt đến những kết quả chưa từng có, những kỹ thuật mới, những đối tượng toán học mới – nói tóm lại là làm phong phú thêm cho phạm vi ban đầu".

Từ ý tưởng của Douady, có thể thấy rằng việc *thay đổi phạm vi* là một kỹ thuật khá quan trọng trong giải toán và nghiên cứu toán học. Điều này dẫn chúng tôi đến một câu hỏi:

Việc thay đổi phạm vi có được học sinh THPT tại ĐBSCL sử dụng như một kỹ thuật giải toán hay không?

Bài viết này nhằm trả lời câu hỏi nêu trên, thông qua một nghiên cứu nhỏ trên 107 học sinh dự bị đại học Khóa 33 của Trường Đại học Cần Thơ năm 2007. Tuy nhiên, trước khi trình bày phần thực nghiệm, chúng tôi tóm tắt vài điểm quan trọng về hai khái niệm phạm vi và ngôn ngữ biểu thị.

2 PHẠM VI VÀ NGÔN NGỮ BIỂU THỊ

Theo R. Douady (1986) và Lê Thị Hoài Châu (2004), từ "*phạm vi*" (cadre) được dùng với nghĩa thông thường khi ta nói về phạm vi đại số, phạm vi số học, phạm vi hình học,… Một *phạm vi* được tạo thành từ các *đối tượng* của một ngành toán học, những *mối liên hệ* giữa chúng, cách *trình bày* chúng, cách *suy nghĩ*, cách *lập luận*, cách *hành động* trên chúng. Hai phạm vi có thể bao gồm những đối tượng như nhau, nhưng khác nhau ở hình ảnh trí tuệ kết hợp với các đối tượng ấy, với mối liên hệ giữa chúng, và ở cách thức hành động, lập luận trên các đối tượng.

Theo Lê Thị Hoài Châu (2004), khái niệm "*ngôn ngữ biểu thị*"[1] (register) xuất phát từ góc độ ngôn ngữ học. Cùng một đối tượng, nhưng mối liên hệ giữa chúng và cách trình bày chúng sẽ không giống nhau trong hai phạm vi khác nhau; ngay cả trong cùng một phạm vi đôi khi cũng có những cách khác nhau để trình bày cùng một đối tượng. Trong trường hợp này, ta nói rằng đối tượng ấy được biểu đạt bằng những ngôn ngữ khác nhau.

"Một ngôn ngữ biểu thị được tạo thành từ các dấu, theo nghĩa rộng nhất của từ này: những vạch, những ký hiệu, những hình vẽ,… Nó là phương tiện để diễn đạt, để biểu thị (Lê Thị Hoài Châu, 2004)".

3 NGHIÊN CỨU NHỎ TRÊN LỚP

3.1 Mục tiêu và đối tượng khảo sát

Nghiên cứu này với mục tiêu chính là tìm hiểu xem học sinh có sử dụng việc thay đổi phạm vi như một kỹ thuật trong giải toán hay không. Đối tượng khảo sát là 107 học sinh của bốn lớp dự bị đại học A_1, B_1, A_2, B_2 Khóa 33 (Khoa Dự bị, Trường Đại học Cần Thơ). Việc khảo sát được thực hiện vào tháng 10/2007.

Vì sao chúng tôi lại lựa chọn đối tượng khảo sát là học sinh các lớp dự bị đại học? Có bốn lý do chính sau đây:

[1] Trong bài viết này, để cho gọn chúng tôi sẽ dùng từ "ngôn ngữ" thay cho "ngôn ngữ biểu thị".

+ Thứ nhất, dù các em học dự bị đại học nhưng kiến thức về toán vẫn ở mức độ THPT;

+ Thứ hai, 107 học sinh này đến từ khắp các tỉnh, thành của ĐBSCL nên nó có tính đại diện khá tốt;

+ Thứ ba, các em đã đậu kì thi Tốt nghiệp THPT, nghĩa là đã vượt trội so với mặt bằng chung, từ đó, nếu việc thay đổi phạm vi đối với các em vẫn khó khăn, thì có thể hiểu rằng việc sử dụng kỹ thuật này trong giải toán là một vấn đề khá khó khăn đối với học sinh khu vực ĐBSCL;

+ Thứ tư, các lớp A_1 và B_1 có trình độ trội hơn so với hai lớp A_2, B_2 nên việc thực hiện trên cả bốn lớp đảm bảo đủ các loại trình độ từ yếu, trung bình đến khá, giỏi.

3.2 Bài toán thực nghiệm

Bài toán

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $x_0 = 4$.

1) Tính $f(x_0)$ và $f'(x_0)$.

2) Không dùng máy tính bỏ túi, ứng dụng công thức sau đây:

$$f(x) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0),$$

để tính gần đúng các giá trị $\sqrt{0,85}$; $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{0,95}$; $\sqrt{1,05}$; $\sqrt{1,1}$; $\sqrt{1,15}$.

3) Gọi *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* lần lượt là các giá trị gần đúng của $\sqrt{0,85}$; $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{0,95}$; $\sqrt{1,05}$; $\sqrt{1,1}$; $\sqrt{1,15}$.

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, các điểm A (0,85; *a*), B (0,9; *b*), C (0,95; *c*), D (1,05; *d*), E (1,1; *e*) và F (1,15; *f*) có thẳng hàng hay không? Giải thích rõ lý do.

Đối với câu 3), em cố gắng giải thích càng nhiều cách càng tốt.

Thời gian thực nghiệm: 45 phút.

3.3 Phân tích tiên nghiệm

3.3.1 Phân tích bài toán

Đối tượng toán học được chúng tôi lựa chọn trong nghiên cứu này là *đường thẳng*. Tại sao lại là đường thẳng? Bởi vì, trước hết, đường thẳng là một khái niệm khá quen thuộc và đã được học sinh tiếp cận từ rất lâu (ngay những lớp đầu THCS). Thứ hai, đường thẳng được biểu thị khá đa dạng dưới nhiều ngôn ngữ khác nhau của hai phạm vi Hình học và Đại số - Giải tích. Ngoài ra, nếu thực nghiệm thành công thì việc lựa chọn đường thẳng còn có thể dẫn đến một kết luận: *ngay cả đối với một khái niệm quen thuộc như đường thẳng mà học sinh vẫn khá khó khăn trong việc thay đổi phạm vi thì đối với những khái niệm khác, việc thay đổi phạm vi có thể là một thách thức không nhỏ!*

Quay lại với bài toán nêu trên, việc chứng minh thẳng hàng là một vấn đề của Hình học. Tuy nhiên, trong bài toán này, chiến lược tối ưu nằm ở phạm vi của

Đại số - Giải tích. Nghĩa là, có thể giải bài toán này rất dễ dàng nếu thay đổi khái niệm đường thẳng từ phạm vi Hình học sang phạm vi Đại số - Giải tích. Tuy nhiên, nếu vẫn ở lại với phạm vi Hình học thì lời giải sẽ rất khó khăn, phức tạp, thậm chí bế tắc.

Để tạo sự thuận lợi cho sự thay đổi khái niệm đường thẳng từ phạm vi Hình học sang phạm vi Đại số - Giải tích, chúng tôi thiết kế thêm câu 1 và 2. Ngoài ra, câu 1 và câu 2 còn ngầm ẩn đưa vào phương trình đường thẳng $y = 0,5(x-1) + 1$ để tạo điều kiện xuất hiện lời giải tối ưu.

3.3.2 Đáp số và các chiến lược

<u>Câu 1</u>

$f(x_0) = 1$; $f'(x_0) = 0,5$.

<u>Câu 2</u>

$\sqrt{0,85} \approx 0,925$; $\sqrt{0,9} \approx 0,95$; $\sqrt{0,95} \approx 0,975$;

$\sqrt{1,05} \approx 1,025$; $\sqrt{1,1} \approx 1,05$; $\sqrt{1,15} \approx 1,075$.

<u>Câu 3</u>

* *Chiến lược "vectơ" S_{VT}*: Dùng khái niệm hai vectơ cùng phương trong hình học giải tích để chứng minh ít nhất 4 bộ ba điểm thẳng hàng.

* *Chiến lược "điểm" $S_Đ$:* Vẽ 6 điểm trên lên mặt phẳng tọa độ, rồi kết luận. Chiến lược này luôn dẫn đến lời giải sai.

* *Chiến lược "đường thẳng" $S_{ĐT}$:* Viết phương trình đường thẳng qua 2 trong 6 điểm đó, sau đó kiểm chứng các điểm còn lại có nằm trên đường thẳng hay không.

* *Chiến lược "phương trình" S_{PT}:* Từ công thức tính gần đúng, suy ra các điểm A, B, C, D, E và F có tọa độ thỏa phương trình $y = 0,5(x-1) + 1$. Vì vậy, chúng nằm trên đường thẳng $y = 0,5(x-1) + 1$, nói cách khác, chúng thẳng hàng.

Đây chính là *chiến lược tối ưu* của bài toán.

3.3.3 Các biến

* V_1 là biến về *"số lượng các điểm"*. Nếu số lượng các điểm nhiều sẽ gây khó khăn cho các chiến lược vectơ và đường thẳng.

* V_2 là biến liên quan đến *"tọa độ các điểm"*. Nếu tọa độ các điểm không phải là các số nguyên, chiến lược điểm và chiến lược vectơ trở nên khó thực hiện. Nếu tọa độ các điểm là các số nguyên, sẽ tạo thuận lợi cho cả ba chiến lược điểm, vectơ và đường thẳng.

* V_3 là biến đề cập đến *"yêu cầu bài toán"*. Nó có hai giá trị là: giải bằng một cách hay nhiều cách. Nếu giải một cách, chiến lược tối ưu sẽ khó xuất hiện hơn. Nếu giải bằng nhiều cách sẽ tạo điều kiện cho nhiều chiến lược xuất hiện, nghĩa là làm thuận lợi hơn cho các lời giải của chiến lược tối ưu.

* Bảng giá trị của biến

Biến	**Giá trị được lựa chọn**
$\mathbf{V_1}$	6 (điểm)
$\mathbf{V_2}$	Không là số nguyên
$\mathbf{V_3}$	Giải bằng nhiều cách

* Giải thích sự lựa chọn

Trong bài toán này, chúng tôi lựa chọn giá trị biến V_1 là 6 (điểm) nhằm làm cho chiến lược vectơ trở nên khá khó khăn và việc tính toán để kiểm chứng xem các điểm có thuộc cùng đường thẳng hay không sẽ rất mất thời gian (có nghĩa là làm hạn chế chiến lược đường thẳng).

Đối với biến V_2, chúng tôi chọn tọa độ các điểm là những số không nguyên. Điều này sẽ gây ra rất nhiều khó khăn trong việc vẽ các điểm trên mặt phẳng tọa độ trong chiến lược điểm, đồng thời nó cũng làm cho việc tính toán trong chiến lược vectơ mất rất nhiều công sức.

Ngoài ra, với 45 phút, chúng tôi còn yêu cầu học sinh giải bằng nhiều cách nhằm tìm xem thật sự những lời giải thuộc phạm vi Đại số - Giải tích có thật sự tồn tại hay không.

3.4 Phân tích hậu nghiệm

* Bảng thống kê Câu 3

Chiến lược		**Số lượng**	**Tỉ lệ (%)**
Vectơ S_{VT}	Kết luận thẳng hàng	43	40
	Kết luận không	7	6,5
Đường thẳng $S_{ĐT}$	Kết luận thẳng hàng	10	9,5
	Kết luận không	0	0
Điểm $S_Đ$	Kết luận thẳng hàng	15	14
	Kết luận không	1	1
Phương trình S_{PT}	Kết luận thẳng hàng	**2**	**2**
	Kết luận không	0	0
Chiến lược khác		27	25
Không giải		2	2

* Phân tích

Mặc dù bài toán được thiết kế nhằm tạo điều kiện thuận lợi nhất cho chiến lược tối ưu xuất hiện như việc đặt bài toán trong phạm vi Đại số - Giải tích hay viết lại công thức gần đúng cho giống với phương trình đường thẳng, thế nhưng tỉ lệ lời giải thuộc chiến lược tối ưu S_{PT} quá thấp (chỉ có 2%) với 2 bài vỏn vẹn! Sau đây là một trong hai lời giải đúng của một em học sinh:

"Để ý ta thấy $f(x) = y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 1/2(x - 1) + 1 = 0{,}5\ (x + 1)$. Ta thế tọa độ của từng điểm *A,B*, *C*, *D*, *E*, *F* vào pt đường thẳng $y = 0{,}5\ (x + 1)$ thì thấy hai vế luôn luôn bằng nhau, chứng tỏ các điểm *A,B*, *C*, *D*, *E*, *F* thẳng hàng".

Như vậy, tuy giải bài toán với chiến lược tối ưu khá dễ dàng nhưng phần lớn học sinh lại không thực hiện được. Điều này cho phép chúng tôi đi đến một kết luận:

Học sinh tại ĐBSCL thường khó khăn khi sử dụng việc thay đổi phạm vi như một kỹ thuật trong giải toán.

Kết luận này cũng chính là câu trả lời cho câu hỏi đặt ra ban đầu.

4 KẾT LUẬN

Kết quả của việc khảo sát này cho thấy rằng, đối với học sinh THPT tại ĐBSCL, việc sử dụng kỹ thuật thay đổi phạm vi trong giải toán là không hề dễ dàng, ngay cả đối với các bài toán liên quan đến những khái niệm khá quen thuộc, chẳng hạn như đường thẳng. Tuy nhiên, việc thay đổi phạm vi lại là một phần việc quan trọng đối với nghiên cứu toán học:

"Nếu quan tâm tới lịch sử phát triển toán học từ xa xưa tới nay, ta sẽ nhận thấy rằng một phần công việc quan trọng của nhà nghiên cứu là giải thích những bài toán mà họ muốn giải quyết, là thay đổi cách nhìn về chúng, là trình bày chúng theo cách khác, là đặt chúng trong phạm vi khác – ít nhất cũng khác một phần, là đối chiếu những bài toán được nêu ra trong các phạm vi khác nhau nhưng nếu bây giờ dịch sang cùng một phạm vi thì lại đặt ra những câu hỏi mới và gợi ra việc sử dụng những công cụ vốn không được nghĩ đến lúc đầu (Lê Thị Hoài Châu, 2004)".

Tóm lại, có thể nói rằng, việc thay đổi phạm vi bài toán là cần thiết và quan trọng như R. Douady và Lê Thị Hoài Châu đã từng khẳng định. Nghiên cứu này của chúng tôi xem như chỉ là những kết quả đầu tiên làm nền tảng cho nhiều khảo sát tiếp theo thực hiện tại các khu vực khác của Việt Nam hay những nghiên cứu sâu hơn về thiết kế và phát triển chương trình toán bậc THPT.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Douady, R. (1986), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Volume 7-2, La Pensée Sauvage.

Lê Thị Hoài Châu (2004), *Sách giáo khoa Hình học thí điểm nhìn từ quan điểm khoa học luận và didactic*, Đề tài cấp bộ, mã số B2003.23.47.