Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2018.160

TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU PHỤ THUỘC THAM SỐ

Lâm Quốc Anh[1*], Nguyễn Phúc Đức[2], Võ Thành Tài[3] và Trần Ngọc Tâm[4]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Phòng Đào tạo, Trường Cao đẳng Kiên Giang*

[3]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học An Giang*

[4]*Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ*

[*]*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lâm Quốc Anh (email: quocanh@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 03/05/2018
Ngày nhận bài sửa: 22/07/2018
Ngày duyệt đăng: 27/12/2018

Title:
On the Hölder continuity of solution maps to parametric optimal control problems

Từ khóa:
Bài toán điều khiển tối ưu, sự ổn định nghiệm, tính liên tục Hölder calm

Keywords:
Hölder calm continuity, optimal control problem, solution stability

ABSTRACT

In this paper, stability conditions of solutions to a parametric optimal control problem with linear state equation are studied. Sufficient conditions for Hölder calm continuity of solution map to this problem are established. In addition, an application of obtained results to a particular case of the underlying problems is also discussed.

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu sự ổn định nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số với phương trình trạng thái tuyến tính. Các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder calm của ánh xạ nghiệm của bài toán đang xét được thiết lập. Ngoài ra, việc ứng dụng các kết quả đạt được vào trường hợp đặc biệt của bài toán tối ưu điều khiển cũng được nghiên cứu

Trích dẫn: Lâm Quốc Anh, Nguyễn Phúc Đức, Võ Thành Tài và Trần Ngọc Tâm, 2018. Tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 54(9A): 53-58.

1 GIỚI THIỆU

Trong thực tiễn cuộc sống, nhiều bài toán đề cập đến các vấn đề kỹ thuật và điều khiển thường liên quan đến các hệ động lực được mô tả bằng các phương trình toán học dạng $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \geq 0$, trong đó $x(t)$ là biến trạng thái mô tả đối tượng đầu ra và $u(t)$ là biến điều khiển mô tả đối tượng đầu vào, những dữ liệu đầu vào có tác động quan trọng có thể làm ảnh hưởng đến sự vận hành đầu ra của hệ thống. Mục đích chính của bài toán điều khiển hệ thống là tìm cách điều khiển đầu vào sao cho đầu ra có những tính chất mà ta mong muốn. Do đó nảy sinh vấn đề thường gặp trong các bài toán thực tế là làm thế nào để chọn ra một phương pháp tối ưu. Chẳng hạn, với hệ thống mô tả quá trình sản xuất sản phẩm trong bài toán kinh tế, bằng cách tìm các dữ kiện điều khiển (như chi phí đầu vào, tốc độ sản xuất một đơn vị sản phẩm trong một đơn vị thời gian,…) ta có thể điều khiển quá trình sản xuất sao cho sản phẩm sản xuất ra đạt được chất lượng tốt nhất hoặc chi phí giá thành nhỏ nhất,…

Từ giữa thế kỷ hai mươi, lý thuyết điều khiển tối ưu đã xuất hiện và phát triển mạnh mẽ với nhiều công trình tiêu biểu của nhà toán học nổi tiếng về nguyên lý cực đại để tìm các điều kiện cần cho quá trình tối ưu (Alekseev *et al.*, 1987). Phát triển từ những bài toán tối ưu hoá cổ điển như bài toán biến phân, bài toán qui hoạch động,… bài toán điều khiển tối ưu là bài toán tìm các quá trình tối ưu cho các hệ điều khiển mô tả bởi các phương trình toán học (Vũ Ngọc Phát, 2001).

Các chủ đề chính nghiên cứu về bài toán điều khiển tối ưu bao gồm sự tồn tại nghiệm (Kien *et al.*, 2012; Zhan *et al.*, 2012; Santos and Silva, 2014), tính ổn định nghiệm (Dontchev *et al.*, 2000; Malanowski, 2001, 2007, 2008; Kien *et al.*, 2008, 2012) và các tài liệu tham khảo trong đó.

Trong thời gian gần đây, một trong những bài toán điều khiển tối ưu được quan tâm là bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số với phương trình trạng thái tuyến tính. Bài toán này được nghiên cứu trong bài báo Kien *et al*. (2012), trong đó các tác giả đã thiết lập được các điều kiện cho sự tồn tại nghiệm và tính ổn định nghiệm theo nghĩa nửa liên tục dưới cho lớp bài toán này. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp thực tế, việc kiểm soát nghiệm, tức là sự ổn định nghiệm, cần phải được lượng hóa. Nói một cách khác, khi dữ liệu bài toán thay đổi, thì độ lệch nghiệm của bài toán cần được đánh giá cụ thể thông qua sự thay đổi của dữ liệu đầu vào. Dạng ổn định theo nghĩa nửa liên tục của ánh xạ nghiệm không thể đáp ứng được yêu cầu này. Do đó, việc nghiên cứu các dạng ổn định cấp cao hơn cho các bài toán là cần thiết. Một trong những dạng ổn định cấp cao, có vai trò quan trọng trong lý thuyết ổn định của tối ưu hóa, là sự ổn định theo nghĩa liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm của các lớp bài toán đang xét. Từ các công trình đã công bố cho thấy rằng đến nay vẫn chưa có công trình nào nghiên cứu về tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số.

Những quan sát trên đã dẫn đến việc đặt ra mục tiêu của bài báo này là nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số theo nghĩa liên tục Hölder calm của ánh xạ nghiệm. Sau đó, áp dụng các kết quả đạt được vào trường hợp đặc biệt của bài toán điều khiển tối ưu đã được xét trong Kien *et al*. (2012).

Phần còn lại của bài báo được cấu trúc như sau: Mục 2 trình bày mô hình bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số. Bên cạnh đó, mục này còn nhắc lại các khái niệm về tính liên tục và liên tục Hölder của ánh xạ đơn trị, đa trị, tính lồi (lõm) và một số kết quả được sử dụng cho các phần tiếp theo. Mục 3 nghiên cứu các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder calm của ánh xạ nghiệm bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số. Ứng dụng các kết quả đạt được trong Mục 3 vào trường hợp đặc biệt được trình bày trong Mục 4. Mục 5 trình bày các kết luận của bài báo.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, ký hiệu $W^{1,1}([0,1],\mathbb{R}^n)$ là không gian Sobolev bao gồm các hàm số liên tục $x:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ sao cho $\dot{x}\in L^1([0,1],\mathbb{R}^n)$. Chuẩn của nó được cho bởi

$$\| x \|_{1,1} = |x(0)| + \| \dot{x} \|_1.$$

Gọi

$$X = W^{1,1}([0,1],\mathbb{R}^n), U = L^p([0,1],\mathbb{R}^m), Z = X\times U, M = L^\infty([0,1],\mathbb{R}^k), \Lambda = L^r([0,1],\mathbb{R}^l)$$

và $E\subset Z$ là một tập con khác rỗng. Phương trình trạng thái

$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + T(t)\lambda(t), t\in [0,1]$ hầu khắp nơi (h.k.n), (1)

với giá trị ban đầu

$$x(0) = x_0, \qquad (2)$$

và điều khiển

$$u(t)\in U, t\in[0,1] \text{ h.k.n.} \qquad (3)$$

Ở đây $\lambda\in\Lambda$ là tham số, $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$, $B(t) = \left(b_{ij}(t)\right)_{n\times m}$ và $T(t) = \left(c_{ij}(t)\right)_{n\times l}$ là các ma trận hàm.

Xét $K:\Lambda \rightrightarrows E$ là ánh xạ đa trị được xác định bởi

$K(\lambda) = \{z = (x,u)\in X\times U: (1), (2), (3)$ được thoả mãn$\}$

và $f: E\times M\to\mathbb{R}$ là hàm giá trị thực.

Với $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$, xét bài toán điều khiển tối ưu tham số sau đây

$$\text{(OCP)}: \min_{z\in K(\lambda)} f(z,\mu).$$

Ta ký hiệu tập nghiệm của (OCP) tại (λ,μ) là $S(\lambda,\mu)$.

Trước hết, nhắc là một số khái niệm cần thiết được sử dụng trong phần sau của bài báo.

Định nghĩa 1.1 (Anh *et al*., 2015) Cho $f: X\to\mathbb{R}$. Khi đó,

(i) f được gọi là $l.\alpha$-Hölder tại $\bar{x}\in X$ nếu tồn tại một lân cận V của $\bar{x}$ sao cho với mọi $x_1, x_2\in V$ thì

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le l d^\alpha(x_1,x_2);$$

(ii) f được gọi là $l.\alpha$-Hölder calm tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một lân cận V của $\bar{x}$ sao cho với mọi $x \in V$ thì

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq ld^{\alpha}(x, \bar{x}).$$

Định nghĩa 1.2 (Anh *et al.*, 2012) Cho $K: \Lambda \rightrightarrows E$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó,

(i) K được gọi là $l.\alpha$-Hölder tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ nếu tồn tại lân cận N của $\bar{\lambda}$ sao cho với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in N$ thì

$\rho(K(\lambda_1), K(\lambda_2)) \leq ld^{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2)$, với $\rho(A, B) \coloneqq \sup_{a \in A, b \in B} (a, b)$;

(ii) K được gọi là $l.\alpha$-Hölder calm tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ nếu tồn tại lân cận N của $\bar{\lambda}$ sao cho với mọi $\lambda \in N$ thì

$$\rho\left(K(\lambda), K(\bar{\lambda})\right) \leq ld^{\alpha}(\lambda, \bar{\lambda}).$$

Định nghĩa 1.3 (Anh *et al.*, 2015) Hàm số $f: X \to \mathbb{R}$ được gọi là $h.\beta$-lồi mạnh trong tập lồi $A \subset X$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ và $\theta \in [0,1]$,

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) - h\theta(1-\theta)d^{\beta}(x_1, x_2).$$

Bổ đề 1.1 (Bất đẳng thức Gronwall-Bellman) (Cesari, 1983) Nếu $u(t) \geq 0, v(t) \geq 0, t \in [0, +\infty)$ là các hàm cho trước, trong đó $u(t)$ liên tục, $v(t)$ khả tích Lebesgue trên mọi đoạn hữu hạn và với hằng số C không âm ta có

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(\alpha)v(\alpha)d\alpha, \ t \geq 0,$$

thì ta cũng có $u(t) \leq C.\exp(\int_0^t v(\alpha)d\alpha)$.

3 TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM

Mục này dành cho việc thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm tại điểm ban đầu $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$. Vì sự tồn tại nghiệm đã được nghiên cứu trong nhiều bài báo trước đây (Alekseev *et al.*, 1987; Kien *et al.*, 2012; Zhan *et al.*, 2012; Santos and Silva, 2014), nên trong bài báo này tập nghiệm của bài toán luôn được giả sử khác rỗng trong lân cận của điểm đang xét.

Định lý 2.1 Giả sử rằng,

(i) tồn tại các hằng số dương T_1, T_2 và một hàm không âm $\phi \in L^p([0,1], \mathbb{R}^m)$ sao cho

$|A(t)| \leq T_1, |T(t)| \leq T_2, |B(t)| \leq \phi(t), t \in [0,1]$ h.k.n;

(ii) tồn tại các lân cận V của $\bar{\mu}$ và N của $\bar{\lambda}$ sao cho với mọi $\mu \in V, f(\cdot, \mu)$ là $h.\beta$-lồi mạnh và liên tục $m.\delta$-Hölder trên $K(N)$;

(iii) với mỗi $z \in K(N), f(z, \cdot)$ là $n.\gamma$-Hölder calm tại $\bar{\mu}$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm S liên tục Hölder calm tại $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$.

Chứng minh. Chứng minh được chia thành 4 bước.

Bước 1. Với mọi $\lambda \in \Lambda$, ta chứng minh $K(\lambda)$ là lồi, khác rỗng và chỉ ra rằng, với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ cho trước và $z_1 = (x_1, u_1) \in K(\lambda_1)$, luôn tồn tại $z_2 = (x_2, u_2) \in K(\lambda_2)$ và số $l > 0$ sao cho

$$\| z_1 - z_2 \| \leq l \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r. \quad (4)$$

Thật vậy, theo định lý tồn tại nghiệm cho bài toán Cauchy của phương trình vi phân tuyến tính (Alekseev *et al.*, 1987) thì $K(\lambda) \neq \emptyset$ với mọi $\lambda \in \Lambda$.

Mặt khác, với mọi $z_1, z_2 \in K(\lambda), z_1 = (x_1, u_1), z_2 = (x_2, u_2)$ và $\theta \in [0,1]$, ta có

$$\theta\dot{x}_1 + (1-\theta)\dot{x}_2 = \theta A(t)x_1(t) + \theta B(t)u_1(t) + \theta T(t)\lambda(t)$$
$$+ (1-\theta)A(t)x_2(t) + (1-\theta)B(t)u_2(t) + (1-\theta)T(t)\lambda(t)$$
$$= A(t)(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + B(t)(\theta u_1 + (1-\theta)u_2) + T(t)\lambda(t).$$

Suy ra, $\theta z_1 + (1-\theta)z_2 \in K(\lambda)$. Do đó $K(\lambda)$ là tập lồi.

Bây giờ ta chỉ ra rằng với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ cho trước và $z_1 = (x_1, u_1) \in K(\lambda_1)$, luôn tồn tại $z_2 = (x_2, u_2) \in K(\lambda_2)$ và $l > 0$ sao cho

$$\| z_1 - z_2 \| \leq l \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r.$$

Thật vậy, với mọi $(x_1, u_1) \in K(\lambda_1)$ thì

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1(t) + B(t)u_1(t) + T(t)\lambda_1(t), t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \quad (5)$$

Chọn $u_2 = u_1$. Theo định lý tồn tại nghiệm cho bài toán Cauchy của phương trình vi phân tuyến tính, tồn tại $x_2 \in X$ sao cho

$$\dot{x}_2 = A(t)x_2(t) + B(t)u_2(t) + T(t)\lambda_2(t), t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \quad (6)$$

Lấy (5) trừ (6) vế theo vế và đặt $x = x_1 - x_2$, ta có $x(0) = 0$ và

$$\dot{x} = A(t)x(t) + T(t)(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)), t \in [0,1] \text{ h.k.n.}$$

Suy ra,

$$|\dot{x}| \leq T_1|x(t)| + T_2|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|, t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \quad (7)$$

Từ $x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds$, ta được

$|x(t)| \leq \int_0^t (T_1|x(s)| + T_2\,|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|)ds$

$\leq \int_0^t T_1|x(s)|ds + \int_0^1 T_2|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|dt$

$\leq \int_0^t T_1|x(s)|ds + T_2 \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_1$

$$\leq \int_0^t T_1|x(s)|ds + T_2 \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r.$$

Theo bất đẳng thức Gronwall-Bellman, ta được

$|x(t)| \leq T_2 \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r \exp(\int_0^t T_1 ds) \leq T_2 \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r \exp(\mathrm{T}_1)$.

Kết hợp với (7), ta có

$\parallel \dot{x}(t) \parallel_1 \leq T_1 \parallel x \parallel_1 + T_2 \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r$

$\leq T_1(T_2 \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r \exp(T_1)) + T_2 \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r = l. \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r,$

trong đó $l := T_1 T_2 \exp(T_1) + T_2$.

Do đó, ta có

$\parallel z_1 - z_2 \parallel = \parallel (x_1, u_1) - (x_2, u_2) \parallel = \parallel x_1 - x_2 \parallel_{1,1} = \parallel x \parallel_{1,1}$

$= |x(0)| + \parallel \dot{x} \parallel_1 \leq l \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel_r.$

Bước 2. Với mọi $z_0 \in S(\lambda, \bar{\mu})$ và $z \in S(\lambda, \mu)$, ta cần chứng minh

$$d(z_0, z) \leq \left(\frac{2n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} d^{\frac{\gamma}{\beta}}(\mu, \bar{\mu}). \quad (8)$$

Dễ thấy (8) đúng nếu $z_0 = z$. Giả sử rằng $z_0 \neq z$. Từ $z_0 \in S(\lambda, \bar{\mu})$ và $z \in S(\lambda, \mu)$, ta có

$$f(w_1, \bar{\mu}) - f(z_0, \bar{\mu}) \geq 0, \forall w_1 \in K(\lambda), \quad (9)$$

$$f(w_2, \mu) - f(z, \mu) \geq 0, \forall w_2 \in K(\lambda). \quad (10)$$

Do tính lồi của $K(\lambda)$ nên ta có $\frac{z_0+z}{2} \in K(\lambda)$. Đặt $w_1 = \frac{z_0+z}{2}$ trong (9), ta có:

$$f\left(\frac{z_0+z}{2}, \bar{\mu}\right) - f(z_0, \bar{\mu}) \geq 0. \quad (11)$$

Mặt khác, do tính lồi mạnh của f nên ta có

$f\left(\frac{z_0+z}{2}, \bar{\mu}\right) \leq \frac{1}{2} f(z_0, \bar{\mu}) + \frac{1}{2} f(z, \bar{\mu}) - \frac{1}{4} hd^{\beta}(z_0, z).$

Suy ra,

$$\frac{1}{4} hd^{\beta}(z_0, z) + f\left(\frac{z_0+z}{2}, \bar{\mu}\right) - f(z_0, \bar{\mu}) \leq -\frac{1}{2} f(z_0, \bar{\mu}) + \frac{1}{2} f(z, \bar{\mu}). \quad (12)$$

Kết hợp (11) với (12), ta có

$$\frac{1}{2} hd^{\beta}(z_0, z) \leq f(z, \bar{\mu}) - f(z_0, \bar{\mu}). \quad (13)$$

Đặt $w_2 = \frac{z_0+z}{2}$ trong (10), ta được

$$f\left(\frac{z_0+z}{2}, \mu\right) - f(z, \mu) \geq 0. \quad (14)$$

Do tính lồi mạnh của f, nên ta có

$f\left(\frac{z_0+z}{2}, \mu\right) \leq \frac{1}{2} f(z_0, \mu) + \frac{1}{2} f(z, \mu) - \frac{1}{4} hd^{\beta}(z_0, z).$

Suy ra,

$$\frac{1}{4} hd^{\beta}(z_0, z) + f\left(\frac{z_0+z}{2}, \mu\right) - f(z, \mu) \leq \frac{1}{2} f(z_0, \mu) - \frac{1}{2} f(z, \mu). \quad (15)$$

Kết hợp (15) với (14), ta được

$$\frac{1}{2} hd^{\beta}(z_0, z) \leq f(z_0, \mu) - f(z, \mu). \quad (16)$$

Từ (13) và (16) suy ra,

$hd^{\beta}(z_0, z) \leq \big(f(z, \bar{\mu}) - f(z, \mu)\big) + \big(f(z_0, \mu) - f(z_0, \bar{\mu})\big).$

Sử dụng tính Hölder calm của f tại $\bar{\mu}$ trong (iii), ta được

$hd^{\beta}(z_0, z) \leq 2nd^{\gamma}(\mu, \bar{\mu}).$

Do đó, (8) được chứng minh.

Bước 3. Bây giờ ta chứng minh rằng với mọi $\bar{z} \in S(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ và $z_0 \in S(\lambda, \bar{\mu})$ thì

$$d(z_0, \bar{z}) \leq \left(\frac{m 2^{3-\delta} l^{\delta}}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} d^{\frac{\delta}{\beta}}\big(\lambda, \bar{\lambda}\big). \quad (17)$$

Dễ thấy (17) đúng nếu $z_0 = \bar{z}$. Giả sử $z_0 \neq \bar{z}$. Theo (4) tồn tại $z_1 \in K(\lambda), z_2 \in K(\bar{\lambda})$ sao cho

$$d(\bar{z}, z_1) \leq ld\big(\lambda, \bar{\lambda}\big), \quad (18)$$

$$d(z_0, z_2) \leq ld\big(\lambda, \bar{\lambda}\big). \quad (19)$$

Do $\bar{z}$ và z_0 là các nghiệm của (OCP), nên ta có

$$f(z_2, \bar{\mu}) - f(\bar{z}, \bar{\mu}) \geq 0, \quad (20)$$

và

$$f(z_1, \bar{\mu}) - f(z_0, \bar{\mu}) \geq 0. \quad (21)$$

Mặt khác, do tính lồi của $K(\bar{\lambda})$ nên $\frac{\bar{z}+z_2}{2} \in K(\bar{\lambda})$. Khi đó, theo (20), ta có

$$f\left(\frac{\bar{z}+z_2}{2}, \bar{\mu}\right) - f(\bar{z}, \bar{\mu}) \geq 0. \quad (22)$$

Ngoài ra, vì f lồi mạnh nên

$$\frac{1}{4} hd^{\beta}(z_0, \bar{z}) \leq \frac{1}{2} f(z_0, \bar{\mu}) + \frac{1}{2} f(\bar{z}, \bar{\mu}) - f\left(\frac{z_0+\bar{z}}{2}, \bar{\mu}\right). \quad (23)$$

Cộng (22) và (23), ta có

$$\frac{1}{4}hd^{\beta}(z_0,\bar{z}) \le \frac{1}{2}f(z_0,\bar{\mu}) - \frac{1}{2}f(\bar{z},\bar{\mu}) + f\left(\frac{\bar{z}+z_2}{2},\bar{\mu}\right) - f\left(\frac{z_0+\bar{z}}{2},\bar{\mu}\right). \quad (24)$$

Nhân (21) với $\frac{1}{2}$ và cộng với (24), ta được

$$\frac{1}{4}hd^{\beta}(z_0,\bar{z}) \le \frac{1}{2}f(z_1,\bar{\mu}) - \frac{1}{2}f(\bar{z},\bar{\mu}) + f\left(\frac{\bar{z}+z_2}{2},\bar{\mu}\right) - f\left(\frac{z_0+\bar{z}}{2},\bar{\mu}\right).$$

Mặt khác, do tính liên tục Hölder của f trên $K(N)$ nên

$$\frac{1}{4}hd^{\beta}(z_0,\bar{z}) \le \frac{1}{2}md^{\delta}(z_1,\bar{z}) + md^{\delta}\left(\frac{\bar{z}+z_2}{2},\frac{z_0+\bar{z}}{2}\right)$$
$$\le \frac{1}{2}md^{\delta}(z_1,\bar{z}) + \frac{1}{2^{\delta}}md^{\delta}(z_2,z_0).$$

Kết hợp với (18) và (19), ta được

$$\frac{1}{4}hd^{\beta}(z_0,\bar{z}) \le m2^{1-\delta}l^{\delta}d^{\delta}(\lambda,\bar{\lambda}).$$

Suy ra,

$$d(z_0,\bar{z}) \le \left(\frac{m2^{3-\delta}l^{\delta}}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} d^{\frac{\delta}{\beta}}(\lambda,\bar{\lambda}).$$

Bước 4. Ta thấy rằng, với mọi $\bar{z} \in S(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ và $z \in S(\lambda,\mu)$,

$$d(\bar{z},z) \le d(\bar{z},z_0) + d(z_0,z) \le \left(\frac{m2^{3-\delta}l^{\delta}}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} d^{\frac{\delta}{\beta}}(\lambda,\bar{\lambda}) + \left(\frac{2n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} d^{\frac{\gamma}{\beta}}(\mu,\bar{\mu}).$$

Do đó,

$$\rho(S(\bar{\lambda},\bar{\mu}),S(\lambda,\mu)) \le \left(\frac{m2^{3-\delta}l^{\delta}}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} d^{\frac{\delta}{\beta}}(\lambda,\bar{\lambda}) + \left(\frac{2n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} d^{\frac{\gamma}{\beta}}(\mu,\bar{\mu}).$$

Vậy S liên tục Hölder calm tại $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$.

4 ÁP DỤNG

Mục này dành cho việc áp dụng các kết quả thu được trong Mục 3 cho bài toán điều khiển tối ưu tham số với phương trình trạng thái tuyến tính được xét trong Kien *et al.* (2012).

Xác định hàm điều khiển $u \in L^p([0,1],\mathbb{R}^m), 1 < p < \infty$ và hàm $x \in W^{1,1}([0,1],\mathbb{R}^n)$ sao cho cực tiểu giá trị

$$\int_0^1 g\big(x(t),u(t),\mu(t)\big)dt, \quad (25)$$

với phương trình trạng thái

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + T(t)\lambda(t), t \in [0,1] \text{ h.k.n}, \quad (26)$$

giá trị ban đầu

$$x(0) = x_0, \quad (27)$$

và điều khiển

$$u(t) \in U, t \in [0,1]. \quad (28)$$

Với mọi $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M$, ta đặt

$$f(z,\mu) = \int_0^1 g\big(x(t),u(t),\mu(t)\big)dt = \int_0^1 g\big(z(t),\mu(t)\big)dt.$$

Khi đó bài toán trên trở thành

(OCP1): $\min\limits_{z\in K(\lambda)} f(z,\mu)$.

Hệ quả Giả sử rằng,

(a) tồn tại các hằng số dương T_1, T_2 và một hàm không âm $\phi \in L^p([0,1],\mathbb{R}^m)$ sao cho

$|A(t)| \le T_1, |T(t)| \le T_2, |B(t)| \le \phi(t), t \in [0,1]$ h.k.n;

(b) tồn tại các lân cận Vcủa $\bar{\mu}$ và N của $\bar{\lambda}$ sao cho với mọi $\mu \in V, g(\cdot,\mu)$ là $h_1.\beta_1$-lồi mạnh và $m_1.\delta_1$-Hölder trong $K(N)$;

(c) với mỗi $z \in K(N), g(z,\cdot)$ là $n_1.\gamma_1$-Hölder calm tại $\bar{\mu}$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm của (OCP1) liên tục Hölder calm tại $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$.

Chứng minh. Ta chứng minh hệ quả này bằng cách kiểm tra các giả thiết của Định lý 2.1.

Ta thấy rằng giả thiết (i) hiển nhiên được thoả mãn.

Với giả thiết (ii), theo giả thiết (b) về tính $h_1.\beta_1$-lồi mạnh của hàm $g(\cdot,\mu)$, với mọi $z_1,z_2 \in K(N), \theta \in [0,1]$, ta có

$$f(\theta z_1 + (1-\theta)z_2,\mu) = \int_0^1 g(\theta z_1 + (1-\theta)z_2,\mu)dt$$
$$\le \theta\int_0^1 g(z_1,\mu)dt + (1-\theta)\int_0^1 g(z_2,\mu)dt - h_1\theta(1-\theta)d^{\beta_1}(z_1,z_2)$$
$$\le \theta f(z_1,\mu) + (1-\theta)f(z_2,\mu) - h_1\theta(1-\theta)d^{\beta_1}(z_1,z_2).$$

Do đó, tính lồi mạnh của hàm $f(\cdot,\mu)$ trên $K(N)$ trong (ii) được thỏa mãn.

Mặt khác, với mọi $z_1,z_2 \in K(N)$, ta có

$$|f(z_1,\mu) - f(z_2,\mu)| = \left|\int_0^1 g(z_1,\mu)dt - \int_0^1 g(z_2,\mu)dt\right|$$
$$= \left|\int_0^1\big(g(z_1,\mu) - g(z_2,\mu)\big)dt\right|$$

$\leq \int_0^1 |g(z_1, \mu) - g(z_2, \mu)| dt$

$\leq \int_0^1 m_1 d^{\delta_1}(z_1, z_2) dt = m_1 d^{\delta_1}(z_1, z_2).$

Điều này đúng do tính liên tục Hölder của g. Như vậy, tính liên tục Hölder của f trong (ii) được thoả mãn.

Với giả thiết (iii) dễ dàng được suy ra dựa vào giả thiết (c) về tính Hölder calm của hàm g.

5 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng các giả thiết liên quan đến tính lồi mạnh cũng như tính liên tục Hölder calm của hàm mục tiêu, tính liên tục Hölder calm của ánh xạ nghiệm bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số với phương trình trạng thái tuyến tính đã được nghiên cứu thành công. Kết quả trong Mục 3 là hoàn toàn mới. Áp dụng kết quả đạt được vào mô hình đặc biệt được nghiên cứu trong bài báo Kien *et al.* (2012) cũng thu được kết quả mới về tính liên tục Hölder calm của ánh xạ nghiệm của bài toán này.

Các kết quả đạt được trong bài báo có thể được tiếp tục nghiên cứu cho tính ổn định nghiệm xấp xỉ của bài toán tối ưu phụ thuộc tham số. Hơn nữa, các kết quả này có thể mở rộng nghiên cứu cho lớp các bài toán tổng quát hơn, chẳng hạn bài toán điều khiển cân bằng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L.Q., Khanh, P.Q. and Tam, T.N., 2012. On Hölder continuity of approximate solutions to parametric equilibrium problems. Nonlinear Analysis. 75(4): 2293-2303.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q. and Tam, T.N., 2015. On Hölder continuity of solution maps of parametric primal and dual Ky Fan inequalities. TOP. 23(1): 151-167.

Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M. and Fomin, S.V., 1987. Optimal Control. Consultants Bureau. New York, 322 pages.

Cesari, L., 1983. Optimization Theory and Applications. Springer. New York, 554 pages.

Dontchev, A., Hager, W.W., Malanowski, K., and Veliov, V.M., 2000. On quantitative stability in optimization and optimal control. Set-Valued Analysis. 8(1-2): 31-50.

Kien, B.T., 2008. Lower semicontinuity of the solution set to a parametric generalized variational inequality in reflexive Banach spaces. Set-Valued Analysis. 16(7-8): 1089-1105.

Kien, B.T., Toan, N.T., Wong, M.M. and Yao, J.C., 2012. Lower semicontinuity of the solution set to a parametric optimal control problem. SIAM Journal Control Optimization. 50(5): 2889-2906.

Malanowski, K., 2001. Sensitivity analysis for optimal control problems subject to higher order state constraints. Annals of Operations Research. 101(1-4): 43-73.

Malanowski, K., 2007. Sufficient optimality conditions in stability analysis for state-constrained optimal control. Applied Mathematics Optimization. 55(2): 255-271.

Malanowski, K., 2007. Stability and sensitivity analysis for linear-quadratic optimal control subject to state constraints. Optimization. 56(4): 463-478.

Malanowski, K., 2007. Stability analysis for nonlinear optimal control problems subject to state constraints. SIAM Journal Optimization. 18(3): 926-945.

Malanowski, K., 2008. Second-order conditions in stability analysis for state constrained optimal control. Journal of Global Optimization. 40(1-3): 161-168.

Santos, I.L.D. and Silva, G.N., 2014. Filippov's selection theorem and the existence of solutions for optimal control problems in time scales. Computational and Applied Mathematics. 33(1): 223-241.

Vũ Ngọc Phát, 2001. Nhập môn lý thuyết điều khiển toán học. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội. 230 trang.

Zhan, Z., Wei, W., Li, Y. and Xu, H., 2012. Existence for calculus of variations and optimal control problems on time scales. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 8(5B): 3793-3808.