

PHÂN NHÁNH CỦA CHU TRÌNH CHỨA HAI ĐIỂM CÂN BẰNG VỚI ĐIỀU KIỆN CỘNG HƯỞNG TRONG MÔ HÌNH ĐỐI LƯU NHIỆT

Nguyễn Hữu Khánh¹

ABSTRACT

We study a bifurcation of codimension-two equilibria occurring in a thermal convection model, and relating to heteroclinic cycles with a resonant condition among eigenvalues of the equilibria. By a combination of Lyapunov-Schmidt method, foliation and dynamical system theory we completely analyze bifurcation phenomenon. Numerical investigations by using the software AUTO and Mathematica show the correctness of the obtained results.

Keywords: equilibria, bifurcation, heteroclinic cycle

Title: Bifurcation of heteroclinic cycles with a resonant condition in a thermal convection model

TÓM TẮT

Chúng tôi nghiên cứu hiện tượng phân nhánh của các điểm cân bằng với đối chiều 2 xảy ra trong mô hình đối lưu nhiệt, liên quan đến chu trình chứa hai điểm cân bằng với điều kiện cộng hưởng trong các giá trị riêng của điểm cân bằng. Bằng cách kết hợp phương pháp Lyapunov-Schmidt, phép phân thớ và lý thuyết hệ động lực chúng tôi phân tích một cách đầy đủ hiện tượng phân nhánh. Khảo sát số bằng các phần mềm AUTO và Mathematica khẳng định tính đúng đắn của các kết quả nhận được.

Từ khóa: điểm cân bằng, phân nhánh, chu trình nối hai điểm cân bằng

1 PHẦN GIỚI THIỆU

Dòng đối lưu Rayleigh-Bénard là mô hình đối lưu của tầng chất lỏng được đốt từ phía dưới. Đây là mô hình vật lý đơn giản nhất minh họa cho sự chuyển tiếp đến các hiện tượng nhiễu loạn. Gần đây, có nhiều mô hình toán học được đưa ra để mô phỏng dòng đối lưu này. Chúng tôi nghiên cứu một mô hình đối lưu nhiệt được đề xuất bởi Busse [2]. Mô hình được biểu diễn bởi một hệ bốn phương trình vi phân phụ thuộc vào hai tham số R (số Rayleigh) và P (số Prandtl).

Bài báo tập trung nghiên cứu phân nhánh toàn cục của điểm cân bằng đối chiều 2, liên quan đến chu trình chứa hai điểm cân bằng (heteroclinic cycle) với điều kiện cộng hưởng xảy ra trong các giá trị riêng của các điểm cân bằng. Phân nhánh làm thay đổi động lực của các chu trình từ trạng thái "hút" sang "đẩy".

Phân nhánh của chu trình chứa một điểm cân bằng (homoclinic cycle) đã được nghiên cứu bởi Robinson trong [7] và Chow cùng các cộng sự trong [3]. Robinson xét với Z_2 -đối xứng và phát hiện ra tâm hút hình học dạng Lorenz xuất hiện trong trường vectơ. Chow xét phân nhánh trong trường hợp không đối xứng và thêm vào điều kiện cộng hưởng đối với các giá trị riêng. Trong bài báo này chúng tôi mở rộng đối tượng nghiên cứu của Robinson và Chow ra đối với chu trình chứa hai

¹ Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

điểm cân bằng. Các kết quả nhận được cho ta các thông tin chính xác và đầy đủ hơn về hiện tượng phân nhánh. Ngoài ra, chúng tôi chứng minh được rằng tồn tại một hệ số a , mà phụ thuộc vào nó trường vectơ có hai hiện tượng phân nhánh: một loại liên quan đến tâm hút dạng Lorenz khi $a > 1$ và một loại chứa sự tích tụ các đường cong phân nhánh của chu trình nối hai điểm cân bằng khi $0 < a < 1$.

Phân tích lý thuyết được thực hiện thông qua phương pháp Lyapunov-Schmidt và phép phân thớ (foliation). Khảo sát số bằng các phần mềm Mathematica và AUTO cho thấy các kết quả nhận được phù hợp với phân tích lý thuyết.

2 MÔ HÌNH ĐỐI LƯU NHIỆT

Dòng đối lưu Rayleigh-Bénard xảy ra trong một tầng chất lỏng nằm ngang được đốt từ phía dưới. Nhiệt độ tại biên trên và biên dưới là T_t và T_b (với $T_t > T_b$). Khi tầng nhiệt độ sai khác giữa hai biên thì tính bất ổn định đầu tiên xảy ra, một mẫu cuộn xuất hiện thay thế cho trạng thái tĩnh của dòng. Tiếp tục tăng nhiệt độ sai khác thì tính đối xứng của mẫu cuộn mất đi. Khi đó một mẫu giãn nghiêng xuất hiện và thay thế cho mẫu cuộn.

Dòng đối lưu được cho bởi các phương trình Boussinesq, trong đó trường vận tốc được phân tích thành các thành phần cực ϕ và thành phần xuyên ψ , đại lượng sai khác nhiệt độ trong dòng tuyến tính cho bởi θ . Khai triển Fourier các thành phần này ta nhận được một hệ bốn phương trình vi phân phụ thuộc vào hai tham số Rayleigh R và Prandtl P (xem [5]):

$$\begin{aligned}
 M_1 \dot{C}_1 &= (R - R_1)C_1 - C_1 \sum_{i=1}^3 \alpha_{1i} C_i^2 - \alpha_{14} C_2^2 C_3 - q_1 C_2 G, \\
 M_2 \dot{C}_2 &= (R - R_2)C_2 - C_2 \sum_{i=1}^3 \alpha_{2i} C_i^2 - \alpha_{24} C_1 C_2 C_3 - q_2 C_1 G - q_2 C_3 G, \\
 M_3 \dot{C}_3 &= (R - R_3)C_3 - C_3 \sum_{i=1}^3 \alpha_{3i} C_i^2 - \alpha_{34} C_1 C_2^2 - q_4 C_2 G, \\
 \dot{G} &= -\frac{\pi^2}{16} G + \frac{3}{16} \pi^4 C_1 C_2 + \frac{5}{16} \pi^4 C_2 C_3.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Các hệ số q_i, α_{ij} phụ thuộc vào R, P và $R_n = (\pi^2 + |k_n|^2)^3 / |k_n|^2, M_n = (1 + P)(\pi^2 + |k_n|^2)^2 / |k_n|^2$, với vectơ sóng $k_n = (n\pi / 4, \pi / 2)$, $n = 1, 2, 3$.

Các biến C_1, C_2, C_3, G trong hệ (1) quyết định trường vận tốc và nhiệt độ của mô hình. Số Rayleigh R tỷ lệ với nhiệt độ sai khác, còn số Prandtl P liên quan đến độ nhớt của dòng.

Hệ (1) đối xứng đối với hai phép biến đổi tuyến tính

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_1(C_1, C_2, C_3, G) &= (-C_1, -C_2, -C_3, G) \\
 \mathfrak{R}_2(C_1, C_2, C_3, G) &= (C_1, -C_2, C_3, -G)
 \end{aligned}$$

Gốc O luôn là điểm cân bằng với mọi giá trị của R và P . Điểm cân bằng này tương ứng với trạng thái không đối lưu. Sự mất ổn định của gốc O xảy ra tại phân nhánh Pitchfork $R=R_2 = \frac{27}{4} \pi^4$. Với R lớn hơn giá trị này, hệ có hai điểm cân bằng O_1 là

$O_2 = \Re_2(O_1)$ trên trục C_2 với tọa độ $C_2 = \pm \frac{4}{3P\pi^3} \sqrt{R - \frac{27}{4}\pi^4}$. Các điểm cân bằng này tương ứng với mẫu xoay.

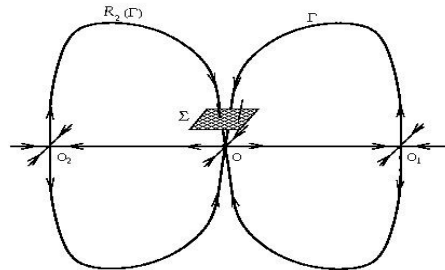
3 PHÂN TÍCH PHÂN NHÁNH

Trong phần này ta nghiên cứu phân nhánh liên quan đến chu trình chứa hai điểm cân bằng O và O_1 (hoặc O_2) với điều kiện cộng hưởng xảy ra trong các giá trị riêng của chúng. Các đường cong phân nhánh được xác định nhờ phương pháp Lyapunov-Schmidt.

Trong mô hình cho bởi hệ (1), phân nhánh xảy ra tại các điểm $E_1(690.68, 0.68)$ và $E_2(688.0387, 0.5499)$ trong mặt phẳng tham số (R, P) . Với các tham số gần điểm các điểm phân nhánh E_1 hoặc E_2 , gốc O có các giá trị riêng chủ yếu thực $\lambda_s < 0 < \lambda_u$ và O_1 có các giá trị riêng chủ yếu thực $\nu_s < 0 < \nu_u$. Phân nhánh đối chiều 2 của các chu trình chứa hai điểm cân bằng được quyết định bởi điều kiện cộng hưởng

$$\lambda_s \nu_s - \lambda_u \nu_u = 0.$$

Ta kí hiệu tập hợp các phương trình vi phân (1) bởi $\dot{x} = X_\gamma(x)$ với $x = (C_1, C_2, C_3, G)$ và $\gamma = (R, P)$.



Hình 1: Chu trình nối hai điểm cân bằng với γ gần γ_0

Gọi γ_0 là điểm phân nhánh E_1 hoặc E_2 ; và gọi Γ là chu trình chứa O và O_1 . Do tính đối xứng, có bốn chu trình đối xứng chứa O và O_1 hoặc O và O_2 . Giả sử Γ không thuộc đa tạp ổn định mạnh của O và Γ không là chu trình nối hai điểm cân bằng lật nghiêng.

Đặt $\varepsilon = (\lambda_s \nu_s) / (\lambda_u \nu_u) - 1$ và μ là khoảng cách mang dấu giữa đa tạp không ổn định $W^u(O_1)$ của O_1 và đa tạp ổn định $W^s(O)$ của O trong một thiết diện cắt ngang dòng. Theo kết quả chứng minh ở các phần sau, quá trình phân nhánh có thể được xác định bởi ánh xạ

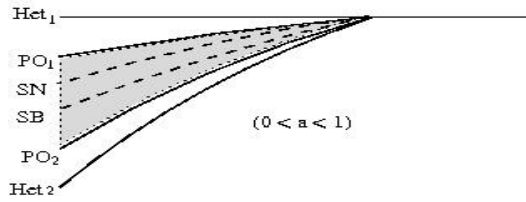
$$f(x) = (\mu + a|x|^{1+\varepsilon})\text{sign}(x). \tag{2}$$

Giá trị của a phụ thuộc vào tính toàn cục của dòng. Có hai hiện tượng phân nhánh khác nhau phụ thuộc vào $0 < a < 1$ hay $a > 1$. Các kết quả khảo sát số cho thấy rằng $0 < a < 1$ tại E_1 và $a > 1$ tại E_2 .

3.1 Trường hợp $0 < a < 1$

Khảo sát số cho thấy tại điểm phân nhánh E_1 hệ số a thỏa điều kiện $0 < a < 1$.

■ **Định lí 1.** Cho $\{X_\gamma\}$ là một họ trường vector với γ gần γ_0 và a là tham số trong (2). Khi $0 < a < 1$, tồn tại một tham số hoá đối với các tham số (μ, ε) dẫn đến một biểu đồ phân nhánh được mô tả dưới đây. Biểu đồ chứa các đường cong phân nhánh từ quỹ đạo nối hai điểm cân bằng đầu tiên Het_1 .



- Het_2 là đường cong của các quỹ đạo gần $\Gamma \cup \mathfrak{R}_2(\Gamma)$ nối O với O_1 .
- SB là đường cong phân nhánh bẻ gãy đối xứng của các quỹ đạo tuần hoàn.
- SN là đường cong phân nhánh saddle-node của các quỹ đạo tuần hoàn gần Γ .
- PO_1 và PO_2 là các đường cong của các quỹ đạo nối O_1 (hoặc O_2) với các quỹ đạo tuần hoàn đối xứng và không đối xứng.
- X_γ có tập bất hyperbolic riêng phần Λ chứa O, O_1 , O_2 nằm trong vùng giới hạn bởi PO_1 và PO_2 .

Định lí 1 được chứng minh qua các bước dưới đây.

3.1.1 *Ánh xạ quay lại (return map)*

Chọn hệ tọa độ phụ thuộc tham số $x = (x_{ss}, x_s, x_u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ trong lân cận đủ nhỏ của gốc O sao cho

$$DX_\gamma(O) = Ax_{ss} \frac{\partial}{\partial x_{ss}} + \lambda_s x_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \lambda_u x_u \frac{\partial}{\partial x_u},$$

trong đó phổ của A có phần thực nhỏ hơn λ_s . Ta giả sử đối xứng \mathfrak{R}_2 được cho bởi

$$\mathfrak{R}_2(x_{ss}, x_s, x_u) = (\tilde{R}x_{ss}, x_s, -x_u)$$

với \tilde{R} là một phép đối hợp.

Chọn một thiết diện cắt ngang Σ gần gốc O với tọa độ $x_s = \delta$ không đổi. Dùng (x_{ss}, x_u) cho tọa độ của hệ hạn trên Σ .

Gọi Π là ánh xạ quay lại trên Σ . Ta sẽ khai triển tiệm cận cho Π theo một hệ tọa độ thích hợp trên Σ .

■ **Mệnh đề 1.** Tồn tại một hệ tọa độ tron $x = (x_{ss}, x_u)$ trên Σ sao cho Π được cho bởi khai triển dưới đây. Khi $x_u > 0$,

$$\Pi(x_{ss}, x_u) = \begin{pmatrix} q(x_u)^{1+\varepsilon} + O(|x_u|^{1+\omega}) \\ \mu + a(x_u)^{1+\varepsilon} + O(|x_u|^{1+\omega}) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

với $\omega > 0$. Khi $x_u < 0$, Π được xác định bởi đối xứng, $\Pi = \mathfrak{R}_2 \circ \Pi \circ \mathfrak{R}_2$. Trong các biểu diễn trên thì μ, ε phụ thuộc một cách trơn theo γ và triệt tiêu khi $\gamma = \gamma_0$. Ngoài

ra, q, a phụ thuộc tron theo γ và $a \neq 0$. Các số hạng cấp cao $O(|x_u|^{1+\omega})$ là hàm trong $C^{\infty,1+\omega}$.

Chứng minh:

Ánh xạ quay lại Π là sự hợp thành của hai ánh xạ chuyển tiếp địa phương gần O, O_1 và hai ánh xạ chuyển tiếp toàn cục. Chọn các thiết diện $\Sigma = \Sigma_0^{in}, \Sigma_0^{out}$ gần O và, $\Sigma_1^{in}, \Sigma_1^{out}$ gần O_1 . Đặt $\pi_0 : \Sigma \rightarrow \Sigma_0^{out}, \pi_1 : \Sigma_1^{in} \rightarrow \Sigma_1^{out}$ là các ánh xạ chuyển tiếp địa phương gần O, O_1 và $\pi_{0,1} : \Sigma_0^{out} \rightarrow \Sigma_1^{in}, \pi_{1,0} : \Sigma_1^{out} \rightarrow \Sigma$ là các ánh xạ chuyển tiếp toàn cục. Ta thấy $\pi_{0,1}, \pi_{1,0}$ là các vi phôi và π_0, π_1 là các khai triển tiệm cận gần O, O_1 . Khi đó $\Pi = \pi_0 \circ \pi_{0,1} \circ \pi_1 \circ \pi_{1,0}$. Chọn tọa độ thích hợp (x_{ss}, x_u) trên Σ , với $x_u > 0$ ta nhận được

$$\Pi(x_{ss}, x_u) = \begin{pmatrix} q(x_u)^{1+\varepsilon} + O(|x_u|^{1+\omega}) \\ \mu + a(x_u)^{1+\varepsilon} + O(|x_u|^{1+\omega}) \end{pmatrix}$$

trong đó $\omega > 0$ và q, a phụ thuộc tron vào γ .

Khi $x_u < 0$, dùng tính đối xứng \mathfrak{R}_2 ta nhận được biểu thức cho $\Pi = \mathfrak{R}_2 \circ \Pi \circ \mathfrak{R}_2$.

3.1.2 Phương trình phân nhánh

Trong phần này, ta dùng phương pháp Lyapunov-Schmidt (xem [3]) để tìm các phương trình phân nhánh cho quỹ đạo tuần hoàn và quỹ đạo nối hai điểm cân bằng.

Xét phương trình cho quỹ đạo $\mathbf{x} = \{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ với

$$x(j+1) - \Pi(x(j)) = 0. \tag{4}$$

Gọi $S(\mathbb{Z}, \Sigma)$ là tập các dãy $\mathbb{Z} \rightarrow \Sigma$ với chuẩn sup. Phương trình (4) có thể viết gọn lại dạng $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, với $\Phi : S(\mathbb{Z}, \Sigma) \rightarrow S(\mathbb{Z}, \Sigma)$. Ta nhận được một tập hợp các phương trình cho các quỹ đạo tuần hoàn:

$$\begin{aligned} x(1) - \Pi(x(0)) &= 0 \\ x(2) - \Pi(x(1)) &= 0 \\ &\vdots \\ x(N) - \Pi(x(N-1)) &= 0. \end{aligned}$$

Trong tọa độ $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_u)$, gọi P là hình chiếu trực giao vào ảnh $\text{Im } D_{\mathbf{x}_{ss}} \Phi|_{\mathbf{x}_u=0}$.

■ **Mệnh đề 2.** Phương trình $(I - P)\Phi = 0$ có thể giải cho \mathbf{x}_{ss} như là hàm của \mathbf{x}_u và tham số γ . Thay vào $P\Phi = 0$ ta được phương trình phân nhánh rút gọn

$$x_{u,j} = (\mu + a |x_{u,j}|^{1+\varepsilon}) \text{sign}(x_{u,j}) + O(\|x_u\|^{1+\omega}),$$

trong đó $\omega > 0, \varepsilon = \frac{\lambda_s V_s}{\lambda_u V_u} - 1, \mathbf{x}_u = \{x_{u,j}\}$.

Chứng minh

Tách phương trình $\Phi = 0$ thành phương trình $(I - P)\Phi = 0$ và $P\Phi = 0$.

Biểu thức tiệm cận của Π được cho ở định lí 1. Vì Π phụ thuộc vào x_u nên áp dụng định lí hàm ẩn ta được

$$D_{x_{ss(j+1)}}(x(j+1) - \Pi(x(j)))|_{x_u(j+1)=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

3.1.3 Các đường cong phân nhánh

i) Đường nối hai điểm cân bằng

Phương trình phân nhánh rút gọn cho quỹ đạo tuần hoàn đơn gần Γ có dạng

$$x_u = \mu + ax_u^{1+\varepsilon} + O(x_u^{1+\omega}). \tag{5}$$

Khi $\mu = 0$, phương trình có nghiệm $x_u = 0$ với mọi ε . Tức là, quỹ đạo nối hai điểm cân bằng nguồn tồn tại dọc theo đường $\{\mu = 0\}$ (ứng với Het_1).

Phương trình phân nhánh cho đường nối hai điểm cân bằng không đối xứng chứa 0 và O_1 là

$$-\mu - a(-\mu)^{1+\varepsilon} + O((-\mu)^{1+\omega}) = 0.$$

Giải phương trình này, ta được

$$\mu = -a^{-1/\varepsilon} + o(a^{-1/\varepsilon})$$

với $\varepsilon < 0$ khi $0 < a < 1$ và $\varepsilon > 0$ khi $a > 1$.

ii) Phân nhánh saddle-node của các quỹ đạo tuần hoàn

Để xét phân nhánh saddle-node của các quỹ đạo tuần hoàn đơn ta dùng phương trình (5) và một phương trình thêm vào bởi lấy đạo hàm (5):

$$1 = (1 + \varepsilon)ax_u^\varepsilon + O(x_u^\omega). \tag{6}$$

Khi $\varepsilon \geq 0$ và $0 < a < 1$, phương trình (6) không thể có nghiệm $x_u > 0$ đủ nhỏ. Khi $\varepsilon < 0$, giải phương trình (6) bằng định lí hàm ẩn ta được

$$x_u = \frac{1}{\varepsilon} a^{-1/\varepsilon} + o(a^{-1/\varepsilon}). \tag{7}$$

Theo định lí hàm ẩn, từ phương trình (5) ta có thể giải ra μ như là hàm của x_u và ε . Kết hợp với (7) ta nhận được

$$\mu = \frac{\varepsilon}{e} a^{-1/\varepsilon} + o(a^{-1/\varepsilon})$$

với $\varepsilon < 0$ nếu $0 < a < 1$ và $\varepsilon > 0$ nếu $a > 1$.

iii) Phân nhánh bề gãy đối xứng của các quỹ đạo tuần hoàn

Điều kiện cho phân nhánh bề gãy đối xứng của quỹ đạo tuần hoàn là

$$-\mu - ax^{1+\varepsilon} + O(x^{1+\omega}) = x \tag{8}$$

$$-a(1 + \varepsilon)x^\varepsilon + O(x^\varepsilon) = -1$$

(9)

Với $\varepsilon < 0$, giải (9) theo x bằng định lí hàm ẩn, ta được $x = \frac{1}{\varepsilon} a^{-1/\varepsilon} + o(a^{-1/\varepsilon})$.

Thay vào (8) ta nhận được đường cong phân nhánh cho phân nhánh bề gãy đối xứng

$$\mu = -\frac{2}{e} a^{-1/\varepsilon} + o(a^{-1/\varepsilon})$$

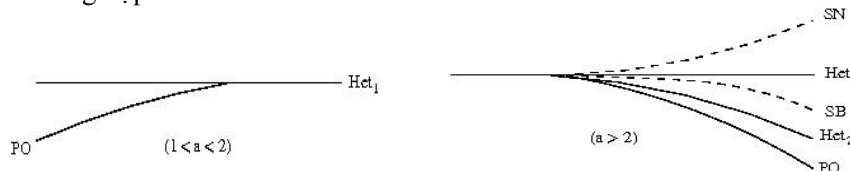
với $\varepsilon < 0$ nếu $0 < a < 1$ và $\varepsilon > 0$ nếu $a > 1$.

3.2 Trường hợp $a > 1$

Khảo sát số cho thấy tại điểm phân nhánh E_2 hệ số a thoả $a > 1$. Trong trường hợp này ta xét phân nhánh xảy ra với $\varepsilon > 0$.

Bằng các phương pháp tương tự như trên, ta nhận được định lí dưới đây.

■ **Định lí 2.** Xét họ các trường vectơ $\{X_\gamma\}$ với γ gần γ_0 . Khi đó tồn tại tham số hoá của các tham số (μ, ε) dẫn đến một biểu đồ phân nhánh được mô tả dưới đây cho hai trường hợp $1 < a < 2$ và $a > 2$.



- Het_1 là đường cong phân nhánh của chu trình nguồn chứa O và O_1 .
- Het_2 là đường cong phân nhánh của các quỹ đạo gần $\Gamma \cup \mathcal{R}_2(\Gamma)$ nối O_1 với O .
- SB là đường cong phân nhánh bẻ gãy đối xứng của các quỹ đạo tuần hoàn.
- SN là đường cong của phân nhánh saddle-node của các quỹ đạo tuần hoàn.
- PO là đường cong phân nhánh của quỹ đạo nối O_1 với quỹ đạo tuần hoàn.

4 ẢNH XẠ KHOẢNG

Phương pháp Lyapunov-Schmidt sử dụng ở phần trên chỉ cho phép ta xác định các đường phân nhánh của các quỹ đạo tuần hoàn. Phương pháp này không có tác dụng khi nghiên cứu động lực nhiều loạn. Thay vào đó ta sẽ dùng phép phân thớ (foliation) bất biến. Trường vectơ được phân thành các thớ rời nhau và có giao với thiết diện cắt ngang dòng là các lá. Bằng cách đồng nhất các điểm trên cùng một lá ta sẽ giảm số chiều của không gian và động lực nhiều loạn được xét thông qua một ánh xạ khoảng.

4.1 Rút gọn về ánh xạ khoảng

■ **Mệnh đề 3.** Ánh xạ Π thừa nhận một $C^{1+\nu}$ phân thớ ổn định F^{ss} ($\nu > 0$) với số đối chiều 1. Ánh xạ rút gọn trên các lá có dạng

$$f(x) = \text{sign}(x)(\mu + a|x|^{1+\varepsilon}) + O(|x|^{1+\omega}) \tag{10}$$

với $\omega > 0$.

Chứng minh

Sự tồn tại của phép phân thớ F^{ss} nhận được từ [1]. Phép phân thớ ổn định cho phép ta rút gọn ánh xạ quay lại về một ánh xạ khoảng bằng cách đồng nhất các điểm trên lá. Chọn một đường cong σ_s trong thiết diện Σ cắt ngang các lá của phân thớ ổn

định mạnh. Gọi $\pi: \Sigma \rightarrow \sigma_s$ là hình chiếu dọc theo các lá của F^{ss} . Ta thấy π là $C^{1+\nu}$. Ánh xạ khoảng rút gọn được định nghĩa.

$$f = \pi \circ \Pi|_{\sigma_s}. \tag{11}$$

Theo lý thuyết hệ động lực, tồn tại một đa tạp trung tâm địa phương $W_{loc}^{s,u}(O)$ chứa đường cong σ_s . Gọi Σ^{out} là thiết diện gần gốc O và cắt ngang quỹ đạo nối O và O_1 . Đặt $\sigma_u = W_{loc}^{s,u}(O) \cap \Sigma^{out}$. Theo [1], tồn tại $C^{1+\nu}$ tọa độ trên σ_s (với $\nu > 0$) và σ_u sao cho ánh xạ chuyển tiếp địa phương $\phi: \sigma_s \rightarrow \sigma_u$ trong tọa độ này cho bởi $\phi(x_u) = x_u^{-\lambda_s/\lambda_u}$. Dòng tới của σ_u xác định phần của đa tạp trung tâm gần O_1 . Tương tự, một ánh xạ chuyển tiếp địa phương trên đa tạp trung tâm địa phương này gần O_1 được cho bởi $\psi(y) = y^{-\lambda_s/\lambda_u}$ trong tọa độ $C^{1+\nu}$ thích hợp (với $\nu > 0$). Ánh xạ chuyển tiếp dọc theo quỹ đạo nối hai điểm cân bằng O và O_1 là vi phôi.

Ánh xạ khoảng cho ở (10) được cấu thành từ ánh xạ chuyển tiếp địa phương và phép chiếu $C^{1+\nu}$. Ánh xạ có biểu thức

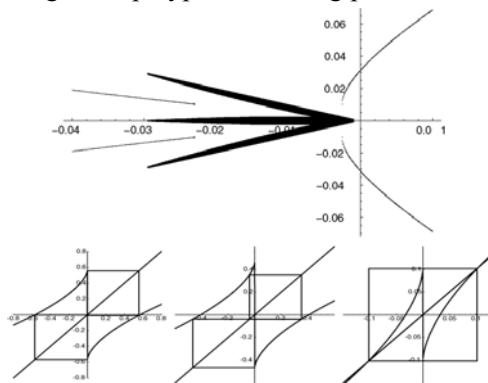
$$f(x) = \mu + ax^{1+\varepsilon} + O(x^{1+\omega}). \tag{12}$$

Do phép đối xứng $f(-x) = -f(x)$, ta suy ra điều phải chứng minh.

Từ ánh xạ (10), ta có ánh xạ thay đổi tỷ lệ $g(\tilde{x}) = \text{sign}(\tilde{x})(\tilde{\mu} + |\tilde{x}|^{1+\varepsilon} + O(|\tilde{x}|^{1+\omega}))$. Dùng phép đối xứng ta nhận được ánh xạ một kiểu $x \mapsto \tilde{\mu} + |\tilde{x}|^{1+\varepsilon} + O(|\tilde{x}|^{1+\omega})$. Ánh xạ này được nghiên cứu trong nhiều bài báo, đặc biệt trong [6]. Các kết quả khẳng định trong trường vector tồn tại tâm hút lạ.

4.2 Tập hợp hyperbolic riêng phần

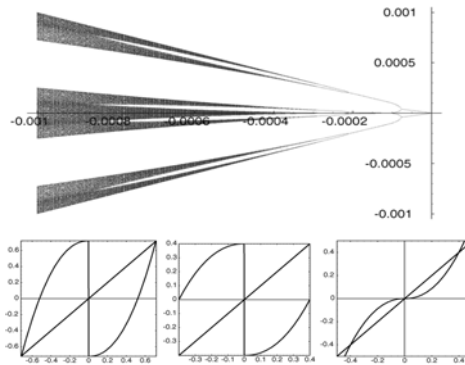
Khi $0 < a < 1$. Từ các kết quả trên, ta thấy tập hyperbolic kỳ dị bắt đầu xảy ra từ đường cong $\mu = -(\frac{a}{2})^{-1/\varepsilon} + o((\frac{a}{2})^{-1/\varepsilon})$. Cố định ε và cho μ thay đổi, thực hiện các phép lặp cho $f(x)$ bằng Mathematica ta nhận được biểu đồ phân nhánh. Ba dãy đen đậm trong biểu đồ ứng với tập hyperbolic riêng phần.



Hình 2: Biểu đồ phân nhánh chỉ ra tập hyperbolic riêng phần của ánh xạ f (với $a = 0.5, \varepsilon = -0.15$). Hàng dưới là ảnh của f tại các giá trị phân nhánh ứng với $Het_2, HetP_2, HetP_1$

4.2 Tâm hút Lorenz

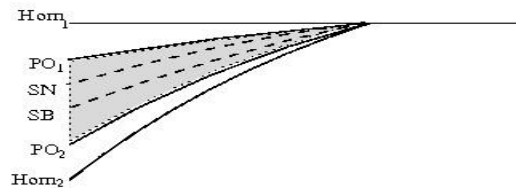
Khi $a > 1$. Tương tự như trên, ta phát hiện ra động lực nhiễu loạn trong ánh xạ khoảng. Trong mô hình xuất hiện tâm hút lạ có dạng Lorenz chứa các điểm cân bằng O, O_1, O_2 và nằm trong vùng giới hạn bởi các đường Het_2 và $HetP$.



Hình 3 : Biểu đồ phân nhánh được tìm bằng Mathematica chỉ ra tâm hút của ánh xạ f (với $a = 2.5, \epsilon = 0.1$). Hàng dưới là ảnh của f tại các giá trị phân nhánh ứng với $HetP, Het_2, Het_1$

5 CHU TRÌNH CHỨA MỘT ĐIỂM CÂN BẰNG

Phân nhánh của cặp chu trình nối một điểm cân bằng (homoclinic cycle) với cấu hình dạng cánh bướm xảy ra trong mô hình tại điểm H trong mặt phẳng tham số ứng với $R = 708.05, P = 0.85$. Ta xem phân nhánh này là trường hợp đặc biệt khi điểm cân bằng O trùng với O_1 . Khi đó $Het_1 \equiv Hom_1, Het_2 \equiv Hom_2$ và biểu đồ phân nhánh ở định lí 1 với $0 < a < 1$ trở thành biểu đồ sau:

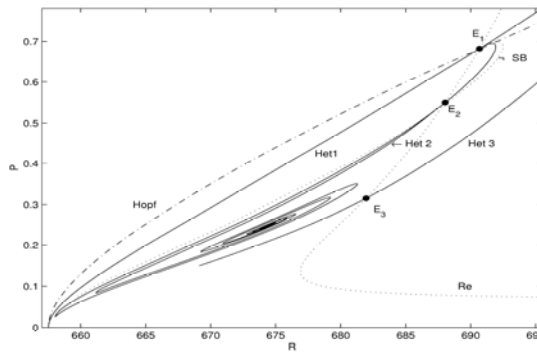


Hình 4: Biểu đồ phân nhánh của chu trình nối một điểm cân bằng với $0 < a < 1$

Biểu đồ trên bao gồm các kết quả của Robinson trong [7] và Chow trong [3]. Tâm hút dạng Lorenz mà Robinson phát hiện nằm trong vùng giới hạn bởi hai đường PO_1 và PO_2 nối O_1 đến các quỹ đạo tuần hoàn. Các phân nhánh SN và SB không được phát hiện trong biểu đồ phân nhánh của Chow.

6. KHẢO SÁT SỐ

Trong phần này ta thực hiện việc khảo sát mô hình bằng phương pháp số. Phần mềm AUTO được dùng để phát hiện các điểm phân nhánh và xác định các đường cong phân nhánh. Phần mềm Mathematica sử dụng cho việc tính toán. Các hình được vẽ bằng Matlab.

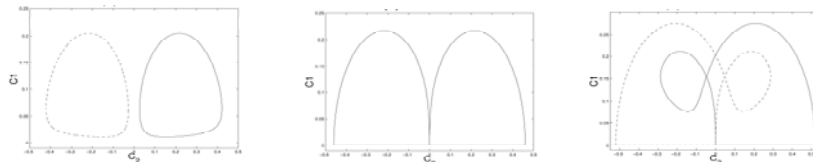


Hình 5: Biểu đồ phân nhánh của chu trình nối hai điểm cân bằng

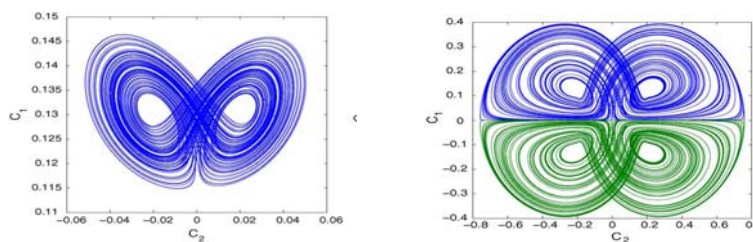
Trong biểu đồ phân nhánh trên, trục hoành và trục tung biểu thị các giá trị của R và P . Het_1 là đường cong của chu trình chứa O và O_1 . Do tính đối xứng \mathfrak{R}_1 và \mathfrak{R}_2 , Het_1 cũng là đường của đường chứa 4 chu trình như vậy đối xứng nhau qua \mathfrak{R}_1 và \mathfrak{R}_2 . Từ chu trình nguồn này, đường Het_2 được phân nhánh.

Liên tục dọc theo đường cong Het_1 , Auto phát hiện ra điều kiện công hưởng xảy ra tại E_1 ($R = 690.68, P = 0.68$). Tương tự trên Het_2 , Auto phát hiện ra E_2 ($R = 688.0387, P = 0.5499$). Dựa vào biểu đồ phân nhánh ta thấy E_1 ứng với trường hợp $0 < a < 1$ và E_2 ứng với $a > 1$. Giữa Het_1 và Het_2 là đường cong SB của phân nhánh bẻ gãy đối xứng của các quỹ đạo tuần hoàn. Các tâm hút lạ chứa O, O_1, O_2 (xem hình 7) được tìm thấy trong vùng phân nhánh của E_1 , giữa Het_1 và Het_2 . Tâm hút dạng Lorenz tìm thấy trong vùng phân nhánh của E_2 về phía phải của Het_2 .

Điều kiện cộng hưởng thỏa mãn dọc theo đường cong Re chứa E_1, E_2 (và E_3). Giao của đường cong này và các đường cong của chu trình nối hai điểm cân bằng tương ứng với các chu trình chứa hai điểm cân bằng trung tính (trạng thái trung gian giữa hút và đẩy).



Hình 6: Từ trái sang phải: Quỹ đạo tuần hoàn, Het1 và Het2



Hình 7: Tâm hút dạng Lorenz và tâm hút chứa O, O_1 và O_2

6 KẾT LUẬN

Các kết quả lý thuyết của phân nhánh của chu trình chứa hai điểm cân bằng với điều kiện cộng hưởng trong bài báo này đã giải thích thật chi tiết hiện tượng phân nhánh trong mô hình đối lưu nhiệt, điều mà khảo sát số không thực hiện được. Ngoài ra, kết quả nhận được là sự mở rộng của phân nhánh của chu trình homoclinic được nghiên cứu bởi Chow [3] và Robinson [7]. Phương pháp Lyapunov-Schmidt kết hợp phép phân thớ trong bài báo có thể dùng để nghiên cứu các bài toán phân nhánh khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A.J. Homburg, 1996. Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields, *Memoirs A.M.S* **578**.
- [2] F.H. Busse, M. Kropp, M. Zaks, 1992. Spatio-temporal structures in phase-turbulent convection, *Phys. D* **61**, 79-92.
- [3] S.N. Chow, B. Deng and B. Fiedler. 1990, Homoclinic bifurcation at resonance, *J. Dyn. Diff. Equations* **2**, 177-244.
- [4] N.H. Khánh, 2005. Phân nhánh toàn cục trong mô hình đối lưu nhiệt, *Tạp chí khoa học, Đại học Cần Thơ* **3**, 183-192.
- [5] Nguyen Huu Khanh, 2010. *Heteroclinic cycles in thermal convection models*, LAP-Lambert Academic Publishing AG & Co KG (Germany).
- [6] D.V. Lyubimov, M.A. Zaks, 1999. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convections, *Phys D* **62**.
- [7] C. Robinson. 1989, Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type, *Nonlinearity* **2**, 495-518.